

Л. А. Латотин Б. Д. Чеботаревский

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
для 8 класса учреждений
общего среднего образования
с русским языком обучения

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь

4-е издание, исправленное и дополненное

Минск «Народная асвета» 2015
Правообладатель Народная асвета

УДК 51(075.3=161.1)
ББК 22.1я721
Л27

Перевод с белорусского языка
Е. В. Масальской

Рецензент
кафедра высшей математики учреждения образования «Полоцкий
государственный университет» (доцент кафедры, кандидат
педагогических наук, доцент *В. С. Вакульчик*)

Латотин, Л. А.

Л27 Математика : учеб. пособие для 8-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский ; пер. с белорус. яз. Е. В. Масальской. — 4-е изд., испр. и доп. — Минск : Народная асвета, 2015. — 407 с. : ил.

ISBN 978-985-03-2387-3.

Предыдущее издание вышло в 2010 г.

УДК 51(075.3=161.1)
ББК 22.1я721

ISBN 978-985-03-2387-3

- © Латотин Л. А., Чеботаревский Б. Д., 2005
- © Латотин Л. А., Чеботаревский Б. Д., 2015, с изменениями
- © Масальская Е. В., перевод на русский язык, 2015
- © Оформление. УП «Народная асвета», 2015

Правообладатель Народная асвета

Дорогие друзья!

За семь лет обучения в школе вы многое узнали. Вы усвоили натуральные, целые, рациональные *числа*, т. е. умеете записывать и сравнивать их, выполнять над ними действия сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень; научились использовать свойства этих действий для упрощения вычислений при нахождении значений числовых выражений.

Свойства действий составляют основу тождественных преобразований *выражений с переменными*, из которых вам стали известны целые и дробно-рациональные выражения. При преобразованиях целых выражений используют раскрытие скобок, вынесение общего множителя за скобки и приведение подобных, формулы сокращенного умножения и разложение многочленов на множители. При преобразованиях дробно-рациональных выражений используют также правила выполнения действий над рациональными дробями. Преобразования выражений вы использовали при решении уравнений.

Вам стали известны основные геометрические *фигуры* и некоторые их свойства. Вы научились измерять отрезки и углы, строить отрезок заданной длины и угол с данной градусной мерой; узнали свойства смежных и вертикальных углов, углов треугольника, в том числе равнобедренного; умеете пользоваться признаками равенства треугольников; знаете некоторые свойства прямоугольного треугольника, признаки и свойства параллельных прямых; познакомились с использованием циркуля и линейки при решении геометрических задач на построение. Как и раньше, вам нужно будет осваивать основные способы доказывания, научиться воспроизводить не только готовые доказательства теорем, помещенные в учебном пособии, но и самим строить несложные доказательства.

Свои знания о числах, выражениях и фигурах вы использовали при решении разнообразных *текстовых задач*. Решение задачи требовало от вас построения математической модели ситуации, которая описана в условии. В одних случаях вы, используя схему, рисунок, решали задачу арифметически, в других, более сложных случаях моделировали условие задачи уравнением и решали ее алгебраически.

Числа, выражения с переменными, фигуры являются объектами изучения трех разделов школьной математики — ариф-

метики, алгебры, геометрии. Эти разделы представлены и в математике 8-го класса.

В этом учебном году вы познакомитесь с иррациональными числами, узнаете, что дополнение множества рациональных чисел иррациональными числами дает новое числовое множество — множество действительных чисел, элементы которого заполняют координатную прямую целиком. В 8-м классе вы будете изучать новый вид выражений — иррациональные, возникающие в связи с введением нового действия — извлечения квадратного корня, которое является действием, обратным возведению в квадрат. Извлечение квадратного корня позволяет решать новый класс уравнений — квадратные уравнения. С этого учебного года вы начнете изучать числовые неравенства, научитесь решать линейные неравенства и их системы; уравнения и неравенства с переменной под знаком модуля.

Как и в предшествующих классах, разделы учебного пособия разбиты на параграфы, в которых выделены смысловые блоки. Наиболее важное в параграфах обозначено специальными шрифтами. Новые понятия выделяются **жирным шрифтом**, правила и утверждения — *жирным курсивом*, а понятия и факты, на которые нужно обратить внимание, но не обязательно запоминать, — *курсивом*. Материал, ограниченный с двух сторон знаком ▲, не предназначен для обязательного контроля.

После объяснительного текста идут контрольные вопросы, отмеченные знаком ?. Они предназначены для проверки того, как вы разобрались в содержании параграфа. Если на тот или иной вопрос вы не смогли ответить, нужно вернуться к объяснительному тексту и с его помощью попробовать ответить на этот вопрос снова.

Упражнения, идущие после контрольных вопросов, разделены на три группы. Упражнения первой группы основаны на том материале, который обсуждался в объяснительном тексте. Они имеют преимущественно тренировочный характер, хотя среди них встречаются и достаточно сложные. Во второй группе, размещенной после разделительной черты, даются самые разнообразные задания на повторение. Решать их вы будете в основном дома. Задачи третьей группы, расположенные после разделительных звездочек, потребуют нестандартных рассуждений, однако знаний для их решения у вас достаточно.

Желаем успехов!

Авторы

Правообладатель Народная асвета

I

раздел

Неравенства

1. Числовые неравенства и их свойства. Двойные неравенства

А. Результат сравнения двух чисел записывают равенством или неравенством.

Пример 1. Сравним числа 5,038 и 5,041. У них равны целые части и количество десятых долей, а сотых долей у первого числа — 3, а у второго — 4. Поскольку $3 < 4$, то $5,038 < 5,041$.

Пример 2. Сравним числа $\frac{5}{6}$ и $\frac{2}{3}$. Для этого приведем вторую дробь к знаменателю 6: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Поскольку $5 > 4$, то $\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$.

Пример 3. Сравним числа $\frac{4}{7}$ и $\frac{8}{15}$. Для этого приведем первую дробь к числителю 8: $\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$. Поскольку $14 < 15$, то $\frac{4}{7} > \frac{8}{15}$.

Пример 4. Сравним числа $\frac{7}{40}$ и 0,175. Преобразуем 0,175 в обыкновенную дробь: $0,175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$. Получим, что $\frac{7}{40} = 0,175$.

Пример 5. Сравним числа -47 и -74 . Модуль 47 первого числа меньше модуля 74 второго числа. Поэтому первое число больше второго: $-47 > -74$.

Для любых двух чисел a и b истинно одно и только одно из утверждений: $a < b$; $a = b$; $a > b$.

Мы знаем, что:

• если $a > b$, то разность $a - b$ — положительное число, и наоборот, если разность $a - b$ — положительное число, то $a > b$ (рис. 1);

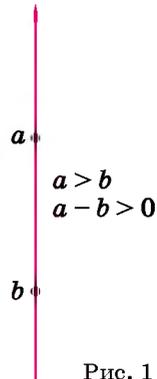


Рис. 1

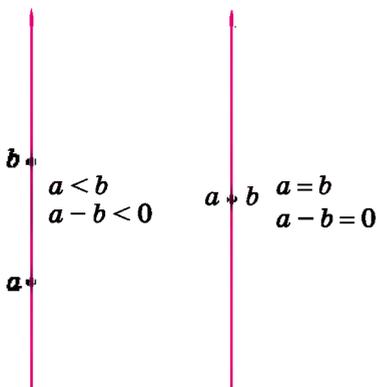


Рис. 2

Рис. 3

• если $a < b$, то разность $a - b$ — отрицательное число, и наоборот, если разность $a - b$ — отрицательное число, то $a < b$ (рис. 2);

• если $a = b$, то разность $a - b$ равна нулю, и наоборот, если разность $a - b$ равна нулю, то $a = b$ (рис. 3).

Это позволяет свести сравнение двух чисел к сравнению их разности с нулем.

Определение 1. $a < b$ означает $a - b < 0$;
 $a = b$ означает $a - b = 0$;
 $a > b$ означает $a - b > 0$.

При сравнении выражений сравнивают их значения при одинаковых значениях переменных.

Пример 6. Сравним выражения $(x + 2)(x + 4)$ и $(x + 3)^2$. Для этого используем определение 1. Запишем разность данных выражений и преобразуем ее:

$$(x + 2)(x + 4) - (x + 3)^2 = x^2 + 4x + 2x + 8 - x^2 - 6x - 9 = -1.$$

Мы видим, что при любом значении переменной x разность выражений $(x + 2)(x + 4)$ и $(x + 3)^2$ имеет значение, равное -1 , которое является отрицательным числом. Значит, $(x + 2)(x + 4) - (x + 3)^2 < 0$, или, с учетом первого утверждения определения 1,

$$(x + 2)(x + 4) < (x + 3)^2.$$

Отношения *меньше* и *больше* связаны друг с другом.

Теорема 1. Если $a < b$, то $b > a$ (рис. 4), и если $a > b$, то $b < a$ (рис. 5).

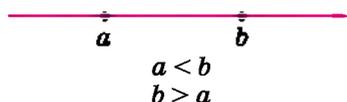


Рис. 4

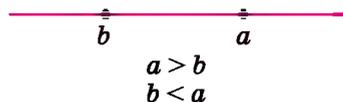


Рис. 5

Доказательство. Пусть $a < b$. Тогда в соответствии с первым утверждением определения 1 можно записать, что $a - b < 0$.

Это означает, что разность $a - b$ — отрицательное число. Значит, число $-(a - b)$, противоположное этой разности, является положительным числом: $-(a - b) > 0$. Учитывая, что $-(a - b) = -a + b = b - a$, получаем $b - a > 0$. А это в соответствии с третьим утверждением определения 1 позволяет записать: $b > a$.

Так же доказывается вторая часть теоремы 1.

Теорема 1 позволяет все доказанные свойства отношения *больше* распространить и на отношение *меньше*, а все доказанные свойства отношения *меньше* распространить и на отношение *больше*.

Теорема 2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (рис. 6); если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (рис. 7).

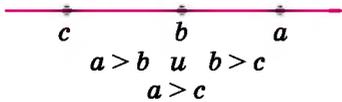


Рис. 6

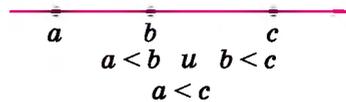


Рис. 7

Доказательство. Пусть $a > b$ и $b > c$. Тогда в соответствии с третьим утверждением определения 1 получаем $a - b > 0$ и $b - c > 0$. Это означает, что числа $a - b$ и $b - c$ оба положительные. Тогда и их сумма является положительным числом, т. е. $(a - b) + (b - c) > 0$. Раскрыв скобки и приведя подобные, получаем $a - c > 0$. В соответствии с третьим утверждением определения 1 это означает, что $a > c$.

Для доказательства второго утверждения используем теорему 1.

Пусть $a < b$ и $b < c$. Тогда $b > a$ и $c > b$. Поскольку $c > b$ и $b > a$, то в соответствии с уже доказанным $c > a$. Значит, $a < c$.

Теорема 2 выражает свойство отношений *меньше* и *больше*, которое называют *транзитивностью*.

Утверждение «Число x не больше числа a » записывают формулой $x \leq a$, утверждение «Число y не меньше числа b » — формулой $y \geq b$, а утверждение «Число z больше m и меньше n » — формулой $m < z < n$.

Формулы вида $a < b$ и $c > d$ называют *неравенствами*, формулы вида $x \leq a$ и $y \geq b$ — *нестрогими неравенствами*, а формулы вида $m < z < n$ — *двойными неравенствами*.

Знак = для обозначения отношения равенства ввел английский врач и математик, автор первых учебников по арифметике и алгебре на английском языке Роберт Рёкорд (1510—1558), знаки < и > для обозначения отношений *меньше* и *больше* — английский математик Томас Гэрриот (1560—1621), а знаки \leq и \geq для обозначения нестрогих неравенств — французский физик и математик Пьер Буге (1698—1758).



1. Какими формулами записываются утверждения « a — положительное число» и « a — отрицательное число»?
2. Каким может быть результат сравнения двух чисел?
3. Дайте определения отношений $a < b$, $a = b$, $a > b$.
4. Сформулируйте теорему о связи отношений *меньше* и *больше*.
5. Сформулируйте теорему, которая выражает транзитивность отношений *меньше* и *больше*.
6. Какие формулы называют неравенствами; нестрогими неравенствами; двойными неравенствами?
7. Как читаются формулы вида $a = b$; $a < b$; $a > b$; $x \leq a$; $y \geq b$; $m < z < n$?

1. Прочитайте неравенства:

- | | | |
|----------------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| а) $-12 > -20$; | д) $b > -11$; | и) $2 < t < 14$; |
| б) $12 < 20$; | е) $c \leq \frac{17}{29}$; | к) $-2 \leq u < 4$; |
| в) $\frac{23}{125} \geq 0,184$; | ж) $k \geq -10$; | л) $-22 < u \leq -12$; |
| г) $a < 19$; | з) $l \leq 129$; | м) $-18 \leq v \leq 24$. |

2. Известно, что $a < b$. Может ли разность $a - b$ быть равной:

- а) 14; б) $-\frac{14}{251}$; в) 0; г) $10^{-100000}$; д) -10^{256} ?

3. Сравните числа m и n , учитывая, что разность m и n равна:

- а) 4; б) -15; в) 0; г) -1024; д) 24 147.

4. Сравните значения выражений $(3x + 8)(2x - 5)$ и $x(6x + 1)$ при:

- а) $x = 0$; б) $x = -3$; в) $x = 10$.

Докажите, что при любом значении переменной x значение первого выражения меньше значения второго.

5. Докажите, что при любом значении переменной истинна формула:

- | | |
|---------------------------------|--|
| а) $4(m - 1) - m < 3(m + 2)$; | г) $(4b - 5)^2 + 16(b - 1) = (4b - 3)^2$; |
| б) $36a^2 > (6a + 5)(6a - 5)$; | д) $3s(3s + 5) < (3s + 1)(3s + 4)$; |
| в) $n(n + 5) > 5(n - 1)$; | е) $(2c - 3)(3c + 2) < (c - 1)(6c + 1)$. |

6. При любом ли значении переменной истинно неравенство:

- а) $(5t - 3)(5t + 3) < 25t(t + 0,4)$;
 б) $49s^2 + 4 > (7s + 2)(7s - 2)$;

- в) $8r(r-5) < (4r-5)^2$;
 г) $64 - 3q(3q+1) < (8-3q)(8+3q)$;
 д) $(7-4p)^2 > 49 - 16p(3+p)$;
 е) $n^2(n+1) + 1 > (1+n)(1-n+n^2)$?

7. Докажите, что при любых значениях переменных истинно неравенство:

- а) $(e+3)^2 > -1$; г) $c(c+1) > c-1$;
 б) $(m+n)^4 > -2$; д) $k(k+l) > kl-2$;
 в) $x^2 - 4x + 1 > x(x-4)$; е) $(h+5)(h+8) > (h+3)(h+10)$.

8. Используя выделение квадрата двучлена, докажите неравенство:

- а) $b^2 - 8b + 20 > 0$; д) $f^2 + 50 > 14f$;
 б) $c^2 + 6c + 10 > 0$; е) $g \leq g^2 + \frac{1}{4}$;
 в) $4d^2 - 4d + 1,5 > 0$; ж) $-1 < 4h^2 + 2h$;
 г) $0 \leq 4e^2 - 20e + 25$; з) $-3 < 9m^2 + 4m$.

9. Покажите на координатной прямой взаимное расположение чисел a, b, c, d, e , учитывая, что истинны следующие неравенства:

$$a > b, c < b, c > d, a < e.$$

10. Докажите, что:

- а) если $a-1 < b$ и $b < 0$, то $a-1$ — отрицательное число;
 б) если $c^3 + 9 > d$ и $d > -3$, то $c^3 + 9 > -3$;
 в) если $m+3 < n$ и $n < 4$, то $m+3 < 5$;
 г) если $x^2 - 8 > x$ и $x > 3$, то $x^2 - 8 > 3$.

11. Используя рисунок 8, сравните, если возможно, числа:

- а) a и b ; г) $a-4$ и $b+3$; ж) $a+1$ и $b-2$;
 б) a и $b+1$; д) $a+2$ и $b+3$; з) $a+2$ и b ;
 в) $a-2$ и b ; е) $a-2$ и $b-8$; и) a и $b-11$.



12. Известно, что $a < 0$. Верно ли, что:

- а) $x+a > x$; в) $x+a^3 > x$; д) $x+a^3 < x$;
 б) $x+a^2 > x$; г) $x+a^2 < x$; е) $x+a < x$?

13. При каких значениях переменной истинно неравенство:

- а) $a + 1 > a$; в) $b > -b$; д) $c^2 > 0$; ж) $d^3 > 0$;
б) $x - 3 < x$; г) $-y > y$; е) $z^6 < 0$; з) $t^3 < 0$?

14. Докажите, что если x, y, z — положительные числа и $x > y$, то:

- а) $\frac{x+z}{y+z} < \frac{x}{y}$; б) $\frac{y+z}{x+z} > \frac{y}{x}$.

15. Сравните значения выражений $m^3 + n^3$ и $mn(m+n)$, учитывая, что m и n — различные положительные числа.

16. Докажите, что:

- а) сумма любого положительного числа и обратного ему числа не меньше двух;
б) если первое положительное число больше второго, то и квадрат первого числа больше квадрата второго;
в) если первое положительное число больше второго, то и куб первого числа больше куба второго;
г) если модуль первого числа больше модуля второго, то и квадрат первого числа больше квадрата второго числа;
д) если первое число больше второго, то и куб первого числа больше куба второго числа.

17. Выделите условие и заключение в утверждениях задания 16. Для каждого из утверждений упражнения сформулируйте утверждение, в котором условие и заключение меняются местами, и определите, истинно ли полученное утверждение.

18. Внутри отрезка MN длиной 6 см выбрана точка X . Найдите длины отрезков MX и NX , учитывая, что:

- а) $XM - XN = 2$ см; в) $2XM + 3XN = 13$ см;
б) $XM = 2XN$; г) $5XM = 7XN$.

19. На прямой a выбраны точки M, N, X , при этом отрезок MN имеет длину 6 см. Найдите длины отрезков MX и NX , учитывая, что:

- а) $XM - XN = 2$ см; в) $2XM + 3XN = 13$ см;
б) $XM = 2XN$; г) $5XM = 7XN$.

20. Даны два отрезка с длинами 2,2 см и 3,8 см (рис. 9). Как с их помощью построить отрезок длиной:

- а) 6 см; в) 0,6 см; д) 2 см;
 б) 1,2 см; г) 1 см; е) 0,4 см?

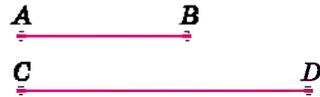


Рис. 9

21. Придумайте способ измерения линейкой с делениями длины диагонали кирпича (рис. 10), если есть:

- а) три кирпича;
 б) только один кирпич.

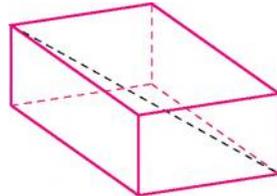


Рис. 10

22. Придумайте способ измерения линейкой с делениями отрезка, который соединяет две отмеченные точки на противоположных гранях кирпича (рис. 11), если есть:

- а) достаточное количество кирпичей;
 б) только один кирпич.

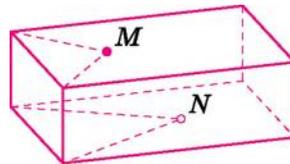


Рис. 11

23. Грани AOB , AOC , BOC треугольной пирамиды $AOBC$ (рис. 12) — равнобедренные прямоугольные треугольники с общей вершиной O . Найдите углы грани:

- а) BOC ; б) ABC .

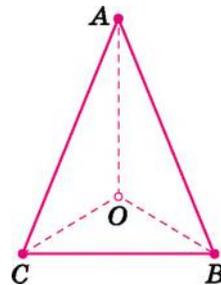


Рис. 12

24. Соловей обыкновенный, варакушка, малиновка — птицы семейства дроздовых, которые гнездятся на территории нашей страны. Длина тела малиновки является средним арифметическим длин тел соловья и варакушки, а вместе с длиной тела соловья составляет 33 см. Найдите длины тел этих птиц, учитывая, что длина тела соловья на 2 см больше длины тела варакушки.

25. Масса малиновки в 1,5 раза меньше массы соловья и на 3 г больше массы варакушки. Найдите массы этих птиц, учитывая, что среднее арифметическое масс соловья и малиновки на 8 г больше массы варакушки.

26. Могло ли так случиться, что, пройдя 100 км на север, затем 100 км на запад и 100 км на юг, путешественник оказался на месте своего старта?

27. Определите, при каком наименьшем количестве слагаемых истинно равенство $СТУК + СТУК + \dots + СТУК = ААА ААА$. Расшифруйте этот арифметический ребус, в котором одинаковыми буквами заменены одинаковые цифры, а разными буквами — разные цифры.

28. В квадрате $ABCD$ выбрали точку F так, что $\angle FAB = \angle FBA = 15^\circ$. Докажите, что треугольник CDF равнобедренный.

2. Действия над числовыми неравенствами

Отношения *больше* и *меньше* между числами связаны с арифметическими действиями. Так, из истинного неравенства $5 < 9$ получаются истинные неравенства $5 + 1 < 9 + 1$ (рис. 13) и $5 - 2 < 9 - 2$ (рис. 14).



Рис. 13

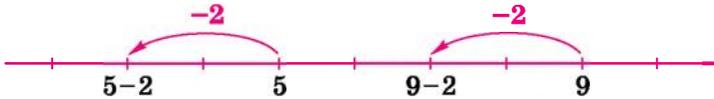


Рис. 14

А. Теорема 3. Если к обеим частям истинного неравенства прибавить или из обеих частей истинного неравенства вычесть одно и то же число, то получится также истинное неравенство:

если $a < b$, c и d — произвольные числа, то $a + c < b + c$ и $a - d < b - d$;

если $a > b$, c и d — произвольные числа, то $a + c > b + c$ и $a - d > b - d$.

Доказательство. Пусть $a < b$. Тогда в соответствии с первым утверждением определения 1 истинно утверждение $a - b < 0$, т. е. $a - b$ — отрицательное число. Поскольку $a - b = (a + c) - (b + c)$, то число $(a + c) - (b + c)$ также отрицательное. Это означает, что неравенство $a + c < b + c$ истинное.

Таким образом, мы доказали, что если $a < b$, то $a + c < b + c$.

Если в качестве числа c взять число $-d$, то получится, что и неравенство $a - d < b - d$ также истинное.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы 3.

Следствие 1. *Если в истинном числовом неравенстве из одной его части в другую перенести слагаемое с противоположным знаком, то получится также истинное неравенство.*

Действительно, если $a + c < b$, то, вычтя из обеих частей неравенства число c , получим $a < b - c$.

Б. Теорема 4. *Если покомпонентно сложить истинные неравенства одного смысла, то получим истинное неравенство того же смысла:*

если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$;

если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Доказательство. Пусть $a < b$ и $c < d$. Учитывая теорему 3, прибавим к левой и правой частям неравенства $a < b$ число c , а к левой и правой частям неравенства $c < d$ число b :

$$a + c < b + c \text{ и } b + c < b + d.$$

Применим теперь к полученным неравенствам свойство транзитивности (теорему 2) и получим: $a + c < b + d$.

Второе утверждение этой теоремы докажите самостоятельно.

Теорема 5. *Если обе части истинного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится также истинное неравенство:*

если $a < b$, c и d — положительные числа, то $ac < bc$ и $\frac{a}{d} < \frac{b}{d}$;

если $a > b$, c и d — положительные числа, то $ac > bc$ и $\frac{a}{d} > \frac{b}{d}$.

Доказательство. Пусть $a < b$ и c — произвольное положительное число. Тогда в соответствии с первым утверждением определения 1 истинно утверждение $a - b < 0$, т. е. $a - b$ — отрицательное число. Поскольку $ac - bc = (a - b)c$, то число $ac - bc$ как произведение отрицательного и положительного чисел также отрицательно. Это означает, что неравенство $ac < bc$ истинно.

Если в качестве числа c взять число $\frac{1}{d}$, обратное положительному числу d , то получится, что если неравенство $a - b < 0$ истинно, то и неравенство $a \cdot \frac{1}{d} < b \cdot \frac{1}{d}$, т. е. неравенство $\frac{a}{d} < \frac{b}{d}$, также истинно.

Вторая часть теоремы 5 доказывается аналогично.

Если обе части истинного неравенства, например $5 < 9$, умножить на отрицательное число, например на -2 , то получатся числа, связанные неравенством противоположного смысла: $-10 > -18$.

Теорема 6. Если обе части истинного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и знак неравенства заменить знаком противоположного смысла (знак $<$ знаком $>$, а знак $>$ знаком $<$), то получится также истинное неравенство:

если $a < b$, c и d — отрицательные числа, то $ac > bc$ и $\frac{a}{d} > \frac{b}{d}$;

если $a > b$, c и d — отрицательные числа, то $ac < bc$ и $\frac{a}{d} < \frac{b}{d}$.

Доказательство. Пусть $a < b$ и c — произвольное отрицательное число. Тогда в соответствии с первым утверждением определения 1 истинно утверждение $a - b < 0$, т. е. $a - b$ — отрицательное число. Поскольку $ac - bc = (a - b)c$, то число $ac - bc$ положительно как произведение двух отрицательных чисел. Это означает, что неравенство $ac > bc$ истинно.

Если в качестве числа c взять число $\frac{1}{d}$, обратное отрицательному числу d , то получится, что если неравенство $a - b < 0$ истинно, то истинно и неравенство $\frac{a}{d} > \frac{b}{d}$.

Второе утверждение теоремы 6 доказывается аналогично.

Следствие 2. Если a и b — числа одного знака и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, а если $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Действительно, если $a < b$ и числа a и b имеют одинаковые знаки, то ab — положительное число. Разделив обе части неравенства $a < b$ на это положительное число, получим: $\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$, или $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. Учитывая теорему 1, окончательно имеем: $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Теорема 7. Если покомпонентно перемножить истинные неравенства одного смысла, левые и правые части которых — положительные числа, то получится истинное неравенство:

если a, b, c и d — положительные числа и $a < b, c < d$, то $ac < bd$, а если $a > b, c > d$, то $ac > bd$.

Доказательство. Пусть a, b, c и d — положительные числа и $a < b, c < d$. Умножив обе части неравенства $a < b$ на по-

ложительное число c , а обе части неравенства $c < d$ на положительное число b , в соответствии с теоремой 5 получим:

$$ac < bc, bc < bd.$$

Применив к полученным неравенствам транзитивность отношения *меньше* (теорему 2), получим: $ac < bd$.

Второе утверждение этой теоремы докажите самостоятельно.

Покомпонентное умножение истинных неравенств одного смысла, среди компонентов которых есть числа разных знаков, может дать в результате и ложное неравенство. Например, неравенства $-5 < -1$ и $-2 < 3$ — истинные, а результат их перемножения — неравенство $10 < -3$ — ложно.

Следствие 3. Пусть a и b — положительные числа, n — натуральное число, тогда если $a < b$, то $a^n < b^n$, а если $a > b$, то $a^n > b^n$.

Доказательство. Пусть a и b — положительные числа и $a < b$. Запишем n таких неравенств и затем в соответствии с теоремой 7 перемножим их. Получим:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}} < \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ множителей}}, \text{ или } a^n < b^n.$$

Вторую часть следствия 3 докажите самостоятельно.

- ?**
1. Сформулируйте утверждение о прибавлении числа к левой и правой частям неравенства.
 2. Сформулируйте утверждение о вычитании числа из левой и правой частей неравенства.
 3. Сформулируйте утверждение о перенесении слагаемого из одной части неравенства в другую.
 4. Сформулируйте утверждение об умножении на число обеих частей неравенства.
 5. Сформулируйте утверждение о делении на число обеих частей неравенства.
 6. Сформулируйте утверждение о связи отношения между данными числами с отношением между обратными им числами.
 7. Сформулируйте утверждение о покомпонентном сложении неравенств.
 8. Сформулируйте утверждение о покомпонентном умножении неравенств.
 9. Сформулируйте утверждение о возведении в степень компонентов неравенства.

29. Запишите истинное неравенство, которое получится, если к левой и правой частям неравенства $10 > -4$ прибавить число:

- а) 6; б) -12 ; в) $7\frac{1}{3}$; г) -10 ; д) 4; е) $-1,04$.

30. Запишите истинное неравенство, которое получится, если левую и правую части неравенства $-9 < 2$ умножить на число:

- а) 2; б) -6; в) $\frac{5}{18}$; г) -1,01; д) $-\frac{1}{9}$; е) $\frac{3}{4}$.

31. Запишите истинное неравенство, которое получится, если левую и правую части неравенства $6 > -12$ разделить на число:

- а) 3; б) -12; в) $-\frac{12}{13}$; г) 2,4; д) $-\frac{3}{11}$; е) 0,5.

32. Определите, если возможно, какими — положительными или отрицательными — являются числа p и q , если истинны неравенства:

- а) $p - 4 > q - 4$ и $q > 2$; д) $2p < 2q$ и $q < -0,0004$;
б) $p + 3 > q + 3$ и $p < -\frac{1}{2}$; е) $-3p < -3q$ и $q < -\frac{1}{128}$;
в) $p + 3 > q + 3$ и $p < \frac{1}{2}$; ж) $-p > -q$ и $q < 12$;
г) $4p < 4q$ и $p > \frac{7}{12}$; з) $-2p > -2q$ и $p > 12$.

33. Учитывая, что неравенство $c < d$ истинно, сравните значения выражений:

- а) $4,2c$ и $4,2d$; д) $\frac{c}{7}$ и $\frac{d}{7}$; и) $-\frac{d}{5}$ и $-\frac{c}{5}$;
б) $-15c$ и $-15d$; е) $\frac{d}{-12}$ и $\frac{c}{-12}$; к) $6c + 5$ и $6d + 5$;
в) $c + 9$ и $9 + d$; ж) $-c$ и $-d$; л) $9 - 8c$ и $9 - 8d$;
г) $d - 1$ и $c - 1$; з) $11 - c$ и $11 - d$; м) $\frac{2}{3} - 0,7d$ и $\frac{2}{3} - 0,7c$.

34. Учитывая, что неравенство $m > n$ истинно, объясните, почему истинно неравенство:

- а) $\frac{m}{3} > \frac{n}{3}$; г) $\frac{1}{3}m - 3 > \frac{1}{3}n - 3$;
б) $-4m < -4n$; д) $5 - m < 5 - n$;
в) $3m + 2 > 3n + 2$; е) $\frac{3}{7} - \frac{m}{5} < \frac{3}{7} - \frac{n}{5}$.

35. Учитывая, что неравенство $k < l$ истинно, сравните значения выражений:

- а) $\frac{1}{k}$ и $\frac{1}{l}$; б) $\frac{2}{l}$ и $\frac{2}{k}$; в) $-\frac{1}{k}$ и $-\frac{1}{l}$; г) $-\frac{2}{k}$ и $-\frac{2}{l}$.

36. Запишите неравенство, которое получится, если к левой и правой частям неравенства $3a + 5b > 2a - b$ прибавить число:

- а) b ; в) $-5b$; д) $3a$; ж) $-b$;
б) a ; г) $5b$; е) $-3a$; з) $-2a$.

37. Докажите, что:

- а) если $2x - 4y > x - 3y$, то $x > y$;
- б) если $3a - 5b > 4a - 6b$, то $a < b$;
- в) если $m(3n + 4) > n(3m + 4)$, то $m > n$;
- г) если $s(3r + 2) < r(3s + 2)$, то $r > s$.

38. Докажите, что:

- а) если $a < 0$ и $a \neq -1$, то $a + \frac{1}{a} < -2$;
- б) если $ab > 0$ и $a \neq b$, то $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$;
- в) если $a > 0$ и $a \neq \frac{1}{2}$, то $4a + \frac{1}{a} > 4$.

39. Истинно ли утверждение:

- а) если $a < b$, то $\frac{a}{b} < 1$;
- в) если $\frac{a}{b} < 1$, то $\frac{b}{a} > 1$;
- б) если $\frac{a}{b} > 1$, то $a > b$;
- г) если $a^2 < 1$, то $a < 1$?

40. Сложите покомпонентно неравенства:

- а) $4 < 6$ и $1 < 4$;
- д) $-3 > -4$ и $-1 > -3$;
- б) $-3 < -2,3$ и $-4 < -1$;
- е) $3,4 > 1,2$ и $1,2 > 0,5$;
- в) $-3 < 3$ и $-4 < 0$;
- ж) $7 > -1\frac{1}{3}$ и $11\frac{1}{3} > 1\frac{1}{6}$;
- г) $-12 < -11$ и $7 < 10$;
- з) $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{3} > -\frac{2}{5}$.

41. Определите, всегда ли получается истинное неравенство при покомпонентном перемножении истинных неравенств:

- а) $2 < 5$ и $2 < 3$;
- д) $-6 > -9$ и $-12 > -20$;
- б) $-9 < -3$ и $-7 < -1$;
- е) $1,5 > 1,1$ и $3,2 > 0,5$;
- в) $-7 < 7$ и $-6 < 0$;
- ж) $3 > -2\frac{3}{7}$ и $1\frac{1}{7} > \frac{7}{16}$;
- г) $-14 < -1$ и $10 < 71$;
- з) $\frac{2}{3} > \frac{2}{7}$ и $-\frac{3}{4} > -\frac{7}{8}$.

42. Учитывая, что m и n — положительные числа, определите, истинно ли утверждение:

- а) если $m > n$, то $m^2 > n^2$;
- в) если $m^2 > n^2$, то $m > n$;
- б) если $m > n$, то $m^3 > n^3$;
- г) если $m^3 > n^3$, то $m > n$.

43. Учитывая, что m и n — произвольные числа, определите, истинно ли утверждение:

- а) если $m > n$, то $m^2 > n^2$; в) если $m^2 > n^2$, то $m > n$;
б) если $m > n$, то $m^3 > n^3$; г) если $m^3 > n^3$, то $m > n$.

44. Докажите, что если $x \leq y$, то:

- а) $x + 6 \leq y + 6$; г) $-3x \geq -3y$; ж) $\frac{x}{-3} \geq \frac{y}{-3}$;
б) $x - 1 \leq y - 1$; д) $-x \geq -y$; з) $5x + 3 \leq 5y + 3$;
в) $5x \leq 5y$; е) $\frac{x}{7} \leq \frac{y}{7}$; и) $\frac{x}{-1,1} - 2 \geq \frac{y}{-1,1} - 2$.

45. Зная, что $u \geq v$, определите, истинно ли неравенство:

- а) $2,3u \geq 2,3v$; д) $-2,3u \leq -2,3v$;
б) $2,3u > 2,3v$; е) $u - 2,3 \leq v - 2,3$;
в) $-2,3u \geq -2,3v$; ж) $u - 2,3 > v - 2,3$;
г) $u - 2,3 \geq v - 2,3$; з) $u + 2,3 > v + 2,3$.

46. Докажите, что при всех значениях переменной истинно неравенство:

- а) $(a + 3)(a - 1) \leq (a + 1)^2$; в) $(b + 3)(b + 7) \leq (b + 5)^2$;
б) $(a + 2)^2 \geq (a + 3)(a + 1)$; г) $(a - 2)^2 \geq (a - 5)(a + 1)$.

47. Докажите, что:

- а) $9a^2 + 1 \geq 6a$ при любом значении a ;
б) $b + \frac{1}{b} \geq 0$, если $b > 0$;
в) $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2$, если $mn > 0$;
г) $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{l}$, если $k \geq l$ и $kl < 0$;
д) $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{s}$, если $r \geq s$ и $rs > 0$;
е) $p^2 + q^2 \geq \frac{1}{2}$, если $p + q = 1$.

48. Верно ли, что:

- а) если $a > 5$ и $b > 6$, то $a + b > 11$;
б) если $a > 5$ и $b > 6$, то $ab > 30$;
в) если $a > 5$ и $b > -6$, то $ab > -30$;
г) если $a < 5$ и $b < -5$, то $a + b < 0$?

49. Павел купил 4 карандаша и 7 тетрадей. Цена карандаша меньше 1600 р., а тетради — меньше 6800 р. Докажите, что стоимость покупки меньше 55 000 р.

50. В треугольнике стороны: одна — меньше 43 мм, вторая — меньше 5 см 7 мм, третья — меньше 78 мм. Докажите, что периметр треугольника меньше 17 см 8 мм.

51. Докажите, что если x и y — положительные числа, $x < 3$ и $y < 5$, то:

- | | | |
|---------------------|---------------------------|-------------------------|
| а) $2x + 3y < 21$; | д) $xy - 10 < 5$; | и) $x^3 + y^3 < 152$; |
| б) $3x + 2y < 19$; | е) $x^2 + y^2 < 34$; | к) $(x + y)^3 < 512$; |
| в) $xy < 15$; | ж) $x^2 + y^2 + 6 < 40$; | и) $x^4 + y^4 < 206$; |
| г) $4xy < 60$; | з) $(x + y)^2 < 64$; | к) $(x + y)^4 < 4096$. |

52. Докажите, что если $a > 2$ и $b < 3$, то:

- | | | |
|----------------------|----------------------|-------------------------|
| а) $a + 3 > b + 2$; | в) $b + 8 < a + 9$; | д) $a > \frac{2}{3}b$; |
| б) $a > b - 1$; | г) $2b < 3a$; | е) $b < 1,5a$. |

53. Докажите, что если k , l и m — положительные числа и $k < 2$, $l < 3$, а $m < 4$, то:

- | | |
|-----------------------|-----------------------------|
| а) $k + l + m < 9$; | г) $kl + km + lm < 26$; |
| б) $klm < 24$; | д) $2k + 3km + klm < 52$; |
| в) $2km + 3lm < 52$; | е) $k^4 + l^3 + m^2 < 59$. |

54. Докажите, что сумма расстояний x , y , z от произвольной внутренней точки M треугольника ABC до его вершин A , B , C (рис. 15) больше полупериметра этого треугольника.

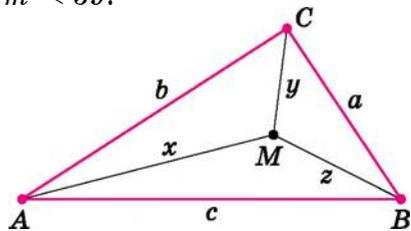


Рис. 15

55. Докажите, что сумма высот треугольника (рис. 16) меньше его периметра.

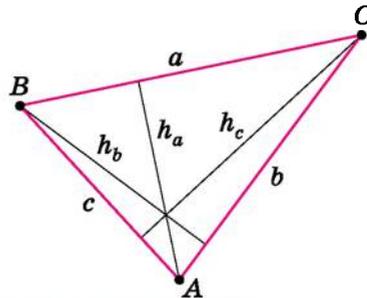


Рис. 16

56. Длины катетов a и b прямоугольного треугольника связаны с длиной c гипотенузы равенством $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора). Используя это,

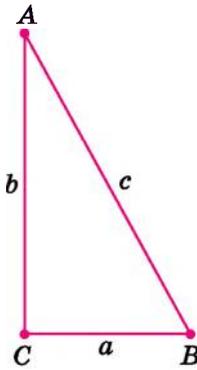


Рис. 17

докажите, что катет прямоугольного треугольника короче гипотенузы (рис. 17).

57. Боковая сторона равнобедренного треугольника больше его основания в два раза. Докажите, что периметр треугольника меньше 25 см, учитывая, что его основание меньше 5 см.

58. Длина прямоугольного участка в два раза больше ширины, а ширина больше 20 м. Докажите, что площадь участка больше 8 а.

59. Докажите, что если $x > 1$, то:

- а) $x^2 > x$; б) $x^3 > x^2$; в) $x^5 > x^3$.

60. Докажите, что если a — положительное число меньше 1, то:

- а) $a^2 < a$; б) $a^3 < a^2$; в) $a^5 < a^3$.

61. Докажите, что если $0 < p < 1$, $0 \leq q < 2$, $0 \leq r < 3$, то:

- а) $prq < 6$; д) $pq + pr + qr < 11$;
 б) $prq < 10$; е) $p^2 + q^2 + r^2 < 14$;
 в) $p + q + r < 6$; ж) $p + pq + pqr < 9$;
 г) $p + q + r < 10$; з) $p + 2pq + 3pqr < 25$.

62. Докажите, что при любых значениях переменных x и y истинно неравенство:

- а) $|x + y| \leq |x| + |y|$;
 б) $|x + y| \geq |x| - |y|$;
 в) $|x| - |y| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.

63. Докажите, что если a , b и c — длины сторон треугольника, то $a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2ac + 2bc$.

64. Докажите, что:

- а) $|a^3| = |a|^3$; б) $|a^2| = a^2$; в) $|a^5| = |a|^5$; г) $|a^4| = a^4$.

65. Докажите, что:

- а) $a^2 + b^2 \geq 2ab$; в) $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$;
 б) $\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \geq ab$; г) $\frac{a}{a^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$.

66. Докажите, что:

- а) если $p \neq 0$, то $p^2 + \frac{1}{p^2} \geq 2$;
б) если $p \neq 0$, то $9p^2 + \frac{1}{4p^2} \geq 3$;
в) если $a > 0$ и $b > 0$, то $ab \geq \left(\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\right)^2$;
г) если $a > 0$ и $b > 0$, то $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

67. Докажите, что при любых значениях переменных истинно неравенство:

- а) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$;
б) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$;
в) $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z)$;
г) $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geq \frac{ab+bc+ca}{3}$.

68. Докажите, что при положительных значениях переменных истинно неравенство:

- а) $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) \geq 6abc$;
б) $x(y^2 + 1) + y(x^2 + 1) + x^2 + y^2 \geq 6xy$;
в) $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$;
г) $(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$.

69. Докажите, что:

- а) если $a + b > 1$, то $a^2 + b^2 > \frac{1}{2}$;
б) если $c + d > 1$, то $c^4 + d^4 > \frac{1}{8}$;
в) если $2a + 3b > 1$, то $\frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{4}b^2 > \frac{1}{72}$;
г) если $e + f > 1$, то $e^8 + f^8 > \frac{1}{132}$.

70. Докажите, что при положительных значениях переменных истинно неравенство:

- а) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$;
б) $(r + s)(r^{-1} + s^{-1}) \geq 4$;
в) $\frac{p+q}{p+q+1} < \frac{p}{p+1} + \frac{q}{q+1}$;
г) $c^{-1} + d^{-1} \leq cd^{-2} + c^{-2}d$.

71. Докажите, что:

- а) если $1 \leq g \leq h$, то $g(1 - g + h) \geq h$;
 б) если $x + 2y = 1$, то $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{5}$;
 в) если $2i + 4j = 1$, то $i^2 + j^2 \geq \frac{1}{20}$;
 г) если $a > 0$, $b > 0$, $c \geq a + b$, $d \geq a + b$, то $cd \geq ad + bc$.

72. Докажите, что при любых значениях переменных истинно неравенство:

- а) $a^2 + 2ab + 2b^2 + 8b + 17 > 0$;
 б) $m^2 + n^2 - 2mn - 2m + 2n + 1 \geq 0$;
 в) $k^2 + 5l^2 - 2kl - 4k + 8l + 5 \geq 0$.

73. Докажите, что при любых значениях переменных истинно неравенство:

- а) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$;
 б) $(m^2 + n^2)(m^2n^2 + 1) \geq 4m^2n^2$;
 в) $(p^2 + q^2)(p^2 + r^2)(q^2 + r^2) \geq 8p^2q^2r^2$;
 г) $u^4 + v^4 + w^4 \geq uvw(u + v + w)$;
 д) $(k^2 + 1)(l^2 + 1)(k^2 + m^2)(l^2 + m^2) \geq 16k^2l^2m^2$.

74. Докажите, что:

- а) если $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$, то $xy + xz + yz > xyz$;
 б) если $p^2 + q^2 + r^2 = 1$, то $(1 - p^2)(1 - q^2)(1 - r^2) \geq 8p^2q^2r^2$.

75. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 9 м. Докажите, что его периметр больше 18 м, но меньше 36 м.

76. Одна сторона треугольника равна 6 см, другая в два раза больше первой, а третья составляет не менее 125 % второй. Докажите, что периметр треугольника не меньше 33 см, но меньше 36 см.

77. Угол M треугольника MNO равен 40° . Угол N составляет не больше 120 % угла M . Запишите двойным неравенством возможные значения:

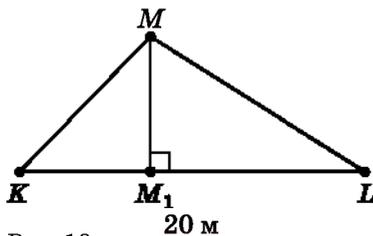


Рис. 18

- а) угла N ; б) угла O .

78. Основание треугольника равно 20 м (рис. 18). Запишите неравенством, какой может быть площадь треугольника, если высота треугольника:

- а) не меньше 12 м;
- б) больше 12 м;
- в) меньше 3 м;
- г) меньше 14 м, но не меньше 10 м;
- д) больше 10 м, но не больше 14 м;
- е) больше 5 м и меньше 13 м.

79. Докажите, что если Q — точка в треугольнике ABC (рис. 19), то

$$AQ + QC < AB + BC.$$

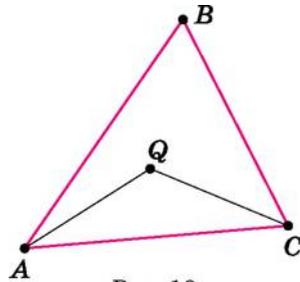


Рис. 19

80. Докажите, что разность $x - y$ может быть:

- а) больше суммы $x + y$;
- б) меньше суммы $x + y$;
- в) равна сумме $x + y$;
- г) больше y ;
- д) больше x ;
- е) равна y .

81. Назовите наибольшее целое значение переменной k , удовлетворяющее неравенству:

- а) $k < -3$;
- б) $k \leq -3$;
- в) $k < 6$;
- г) $k \leq 6$;
- д) $k < -0,6$;
- е) $k \leq -0,6$;
- ж) $k < \frac{1}{101}$;
- з) $k \leq \frac{1}{101}$.

82. Назовите наименьшее целое значение переменной l , удовлетворяющее неравенству:

- а) $l > -1$;
- б) $l \geq -1$;
- в) $l > 3$;
- г) $l \geq 3$;
- д) $l > -0,13$;
- е) $l \geq -0,13$;
- ж) $l > \frac{1}{1001}$;
- з) $l \geq \frac{1}{1001}$.

83. Запишите формулой утверждение:

- а) сегодня в Бресте 11°C , а в Минске температура (t , $^\circ\text{C}$) не выше;
- б) быстрое таяние снега вызвало подъем (h , м) воды в реке не меньше чем на $4,5$ м;
- в) температура (t , $^\circ\text{C}$) воды при нормальном давлении не меньше 0°C и не больше 100°C ;
- г) скорость (v , км/ч) движения на данном участке дороги не должна превышать 70 км/ч.

84. Найдите значение выражения $\frac{x^2 - 5,2x + 1}{x - 5}$ при x , равном:

- а) -3 ; б) -5 ; в) $-\frac{1}{5}$; г) $\frac{1}{5}$; д) 3 ; е) 5 .

85. Сократите дробь:

- а) $\frac{a^2 - 6a + 8}{8a - 2a^2}$; в) $\frac{18m^2 - 24m + 8}{(2 - 3m)^2}$;
б) $\frac{3b + 15}{25 + 10b + b^2}$; г) $\frac{6p^2 - 2pq}{9p^2 - 6pq + q^2}$.

86. Решите уравнение:

- а) $\frac{c - 4}{5} - \frac{2c + 1}{2} = \frac{9c + 7}{4}$; б) $\frac{3d - 2}{5} + \frac{2d - 3}{6} = \frac{5d + 6}{80}$.

87. На прямой отмечены четыре точки P, Q, R, S . Найдите возможные значения длины отрезка PS , учитывая, что:

- а) $PQ = 10$ см; $QR = 13$ см; $RS = 17$ см;
б) $QR = 7$ дм; $RS = 13$ дм; $PQ = 10$ дм;
в) $PQ = 1,3$ м; $RQ = 2,5$ м; $SR = 3,6$ м.

88. На отрезке CD длиной 18 см выбраны точки K и L так, что $CK : KL : LD = 2 : 3 : 4$. Найдите длины отрезков CK, KL, LD .

89. Найдите точку P_1 , в которую перейдет точка $P(x)$ координатной прямой при симметрии относительно некоторой ее точки, учитывая, что точка $M(a)$ при этой симметрии переходит в точку $M_1(b)$ и:

- а) $x = 0$; $a = 1$; $b = 3$; в) $x = -7$; $a = -9$; $b = 7$;
б) $x = 11$; $a = -1$; $b = 1$; г) $x = -1,6$; $a = -10$; $b = -4$.

90. Внутри отрезка MN длиной 105 мм выбрана точка X . Найдите длины отрезков MX и NX , учитывая, что:

- а) $MX : NX = 4 : 3$; б) $NX : MX = 2 : 3$; в) $3MX = 2NX$;
г) площадь квадрата, построенного на отрезке MX , на 525 мм² больше площади квадрата, построенного на отрезке NX .

91. На рисунке 20 показана развертка поверхности цилиндра. Боковая поверхность цилиндра равна 54 см², а высота прямоугольника развертки боковой поверхности в полтора

раза меньше другого его измерения. С точностью до квадратного сантиметра найдите полную поверхность цилиндра.

92. Когда развернули на плоскость пятиугольную пирамиду, то получилась пятиконечная звезда (рис. 21). Основанием пирамиды является пятиугольник $ABCDE$ с равными сторонами и углами, а боковые ребра — равнобедренные треугольники. Найдите углы боковой грани пирамиды, учитывая, что сумма углов пятиугольника равна 540° .

93. Жерлянка краснобрюхая, квакша обыкновенная, чесночница — земноводные, живущие на территории нашей страны. Длина тела жерлянки относится к длине тела квакши как $9:8$, а к длине тела чесночницы как $3:4$. Найдите длины тел этих животных, учитывая, что тело квакши короче тела чесночницы на 20 мм.

94. Количество икринок, которые откладывает квакша обыкновенная, таково, что оно на 0,1 тыс. больше утроенного количества икринок, которые откладывает жерлянка краснобрюхая, и в 2,6 раза меньше количества икринок, которые откладывает чесночница. Сколько икринок откладывают квакша обыкновенная, жерлянка краснобрюхая и чесночница, если количество икринок, которые откладывает чесночница, на 2 тыс. больше удвоенного количества икринок, которые откладывает жерлянка?

95. Через 2 ч после отправления из Кличева Антону осталось проехать до Березино 16 км. Если бы он ехал со скоростью, на 2 км/ч меньшей, то через 3 ч не доехал бы до Березино 4 км. Найдите скорость, с которой ехал Антон, и длину пути от Кличева до Березино.

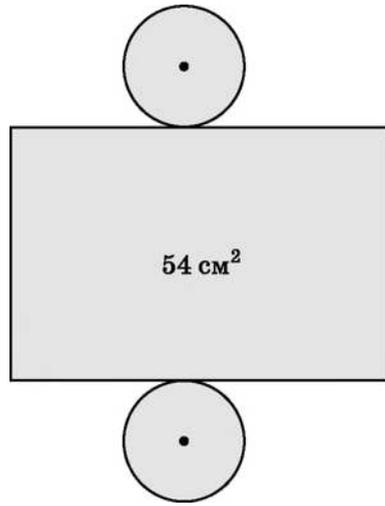


Рис. 20

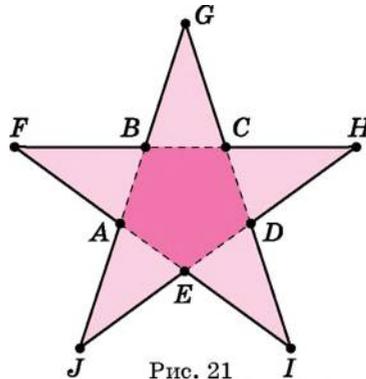


Рис. 21

96. Средняя урожайность гречихи на двух полях, первое из которых на 12 га больше, составила 21 ц/га. Найдите, сколько гречихи собрали со второго поля, учитывая, что урожайность на нем была 25 ц/га, а урожай на первом поле оказался на 300 ц меньше, чем на втором.

97. Дунай, Днестр, Днепр, Кызыл-Ирмак — наиболее длинные реки, впадающие в Черное море. Семьдесят первая доля длины Днепра совпадает с девяносто второй долей увеличенной на 2 км длины Дуная, с сорок третьей долей уменьшенной на 19 км длины Днестра и с тридцать седьмой долей уменьшенной на 4 км длины Кызыл-Ирмака. Найдите длины этих рек, учитывая, что самая длинная из них отличается от самой короткой на 1699 км.

98. Днестр, Днепр, Южный Буг — реки, впадающие в Черное море. На схеме, приведенной на рисунке 22, показаны соотношения между их длинами. Составьте задачу и решите ее.

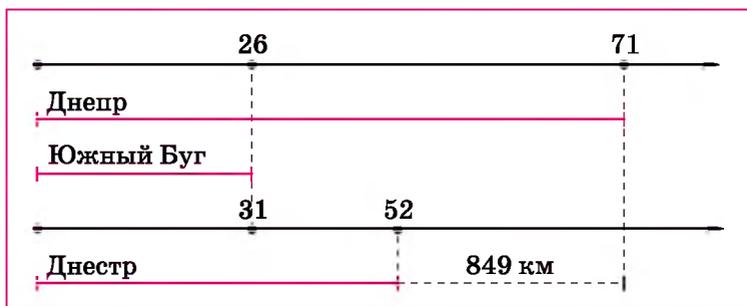


Рис. 22

* * *

99. На плоскости отмечено 4 точки. Докажите, что из них можно выбрать три такие точки, которые не являются вершинами остроугольного треугольника.

100. Сумма двух чисел равна 330, а меньшее из них получается из большего вычеркиванием нуля. Найдите эти числа.

101. (Из коллекции профессора Брайена.) По пятницам профессор Брайен в своем клубе предлагает сыграть с ним на 10 фунтов. Для этого нужно открыть одну карточку. Если, например, мистер Смит открыл карточку, на которой написано «Получите», то он получает от профессора Брайена 10 фунтов. А если будет открыта надпись «Заплатите», то мистер Смит должен уплатить профессору Брайену 10 фунтов.

— А может ли так случиться, что на всех карточках написано «Заплатите»?

— Игра есть игра, такое не исключается. Но в игре может случиться и так, что везде написано «Получите».

— Так что это за игра, если от игрока ничего не зависит?

— Не будьте фаталистами. Вы в своем выборе не целиком зависите от удачи, поскольку на повернутых к вам сторонах карточек будет что-то написано.

— Это уже интереснее. Но в какой мере можно верить надписям?

— Сегодня надпись на одной карточке истинная, а на другой ложная, — и профессор положил на стол две карточки, показанные на рисунке 23.

Какую карточку нужно перевернуть, чтобы выиграть 10 фунтов?

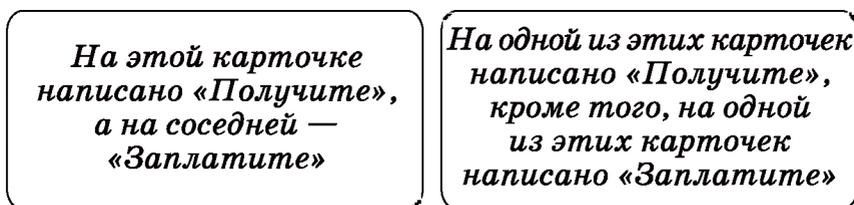


Рис. 23

3. Числовые промежутки

А. Неравенство с переменной выделяет из множества всех чисел определенную его часть.

Рассмотрим двойное неравенство $-3 < c < 4$. Отметим на координатной прямой точки A и B с координатами -3 и 4 (рис. 24).



Рис. 24

Точка X , координата которой удовлетворяет неравенству $-3 < c < 4$, лежит между точками $A(-3)$ и $B(4)$, и наоборот, если точка X лежит между точками $A(-3)$ и $B(4)$, то ее координата c удовлетворяет неравенству $-3 < c < 4$.

Множество чисел, удовлетворяющих условию $-3 < c < 4$, называют **числовым промежутком** или просто **промежутком** и обозначают $(-3; 4)$. Запись $(-3; 4)$ читают: «*Промежуток от минус трех до четырех*». Промежуток $(-3; 4)$ изображен

на рисунке 25. Изображение чисел -3 и 4 незакрашенными кружками подчеркивает то обстоятельство, что эти числа не принадлежат промежутку $(-3; 4)$.



Рис. 25

Число c , удовлетворяющее двойному неравенству $-3 \leq c < 4$, изображается точкой X , лежащей между точками $A(-3)$ и $B(4)$, или точкой, совпадающей с точкой A . Множество таких чисел обозначают $[-3; 4)$. Запись $[-3; 4)$ читают: «Промежуток от минус трех до четырех с числом минус три включительно».



Рис. 26



Рис. 27

Промежуток $(-3; 4]$ изображен на рисунке 27. Каждое число этого промежутка удовлетворяет неравенству $-3 < c \leq 4$. Запись $(-3; 4]$ читают: «Промежуток от минус трех до четырех с числом четыре включительно».



Рис. 28

Число c , удовлетворяющее двойному неравенству $-3 \leq c \leq 4$, изображается точкой X , лежащей между точками $A(-3)$ и $B(4)$, или точкой, совпадающей с точкой A или с точкой B . Множество таких чисел изображают так, как на рисунке 28, и обозначают $[-3; 4]$. Запись $[-3; 4]$ читают: «Промежуток от минус трех до четырех с числами минус три и четыре включительно».



Рис. 29

Изображение чисел -3 и 4 закрашенными кружками подчеркивает то, что эти числа принадлежат промежутку $[-3; 4]$. Строгому неравенству $c > 4$ удовлетворяют все числа, которые на координатной прямой изображаются точками X , расположенными правее точки $B(4)$ (рис. 29). Множество таких чисел называют промежутком от 4 до



Рис. 30

плюс бесконечности и обозначают $(4; +\infty)$. Промежуток $(4; +\infty)$ изображен на рисунке 30.

Нестрогому неравенству $c \geq 4$ удовлетворяют все числа, которые на координатной прямой изображаются точками X , расположенными правее точки $B(4)$, или самой точкой B . Множество таких чисел обозначают $[4; +\infty)$ и изображают так, как на рисунке 31. Запись $[4; +\infty)$ читают: «Промежуток от четырех до плюс бесконечности с числом четыре включительно».



Рис. 31

Множества чисел, которые удовлетворяют неравенствам $c < -3$ и $c \leq -3$, изображены соответственно на рисунках 32 и 33. Эти множества являются промежутками, которые обозначают $(-\infty; -3)$ и $(-\infty; -3]$ соответственно.



Рис. 32

Запись $(-\infty; -3)$ читают: «Промежуток от минус бесконечности до минус трех», а запись $(-\infty; -3]$ — «Промежуток от минус бесконечности до минус трех с числом минус три включительно».



Рис. 33

Для двойных и нестрогих неравенств остаются в силе все теоремы, доказанные для строгих неравенств, при этом знаки \leq и \geq считаются знаками противоположного смысла.

Действия над неравенствами позволяют оценить сумму, разность, произведение, частное. Пусть $15 < a < 16$ и $4 < b < 5$.

Оценим сумму $a + b$. Двойное неравенство $15 < a < 16$ означает, что $15 < a$ и $a < 16$, а неравенство $4 < b < 5$ — что $4 < b$ и $b < 5$. Применим теорему 4 к неравенствам $15 < a$ и $4 < b$, а затем к неравенствам $a < 16$ и $b < 5$:

$$\begin{array}{l} 15 < a \text{ и } a < 16 \\ 4 < b \text{ и } b < 5 \\ \hline 19 < a + b \text{ и } a + b < 21. \end{array}$$

Результат можно записать двойным неравенством:

$$19 < a + b < 21.$$

Записи обычно ведут сразу через двойные неравенства:

$$\begin{array}{l} 15 < a < 16 \\ 4 < b < 5 \\ \hline 19 < a + b < 21. \end{array}$$

Оценим разность $a - b$. Используем то, что $a - b = a + (-b)$. Оценим сначала выражение $-b$. Для этого к неравенству $4 < b < 5$ применим теорему 6. Получим: $-4 > -b > -5$, или $-5 < -b < -4$. Теперь к неравенствам $15 < a < 16$ и $-5 < -b < -4$ применим теорему 4 о покомпонентном сложении неравенств:

$$\begin{array}{r} 15 < a < 16 \\ -5 < -b < -4 \\ \hline 10 < a - b < 12. \end{array}$$

Оценим произведение ab . Поскольку число a больше положительного числа 15, а число b больше положительного числа 4, то числа a и b оба положительны. Поэтому к данным неравенствам можно применить теорему 7 о покомпонентном умножении:

$$\begin{array}{r} 15 < a < 16 \\ 4 < b < 5 \\ \hline 60 < ab < 80. \end{array}$$

Оценим частное $\frac{a}{b}$. Используем то, что $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$. Сначала оценим выражение $\frac{1}{b}$. Применив к неравенству $4 < b < 5$ следствие из теоремы 6, получим: $\frac{1}{4} > \frac{1}{b} > \frac{1}{5}$, или $\frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{4}$. Теперь к неравенствам $15 < a < 16$ и $\frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{4}$ применим теорему 7 о покомпонентном умножении:

$$\begin{array}{r} 15 < a < 16 \\ \frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{4} \\ \hline 3 < \frac{a}{b} < 4. \end{array}$$

- ?** 1. Представьте на координатной прямой каждый из промежутков: $a < x < b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$, $a \leq x \leq b$, $x < a$, $x \leq a$, $x > a$, $x \geq a$. Сделайте соответствующую запись и прочитайте ее.
2. Что означает закрашенный кружок при изображении на координатной прямой определенного промежутка?
3. Что означает незакрашенный кружок при изображении на координатной прямой определенного промежутка?

102. Определите, принадлежит ли промежутку:

- а) $(-1; 5)$ число 10, число 1, число 5;
 б) $(-1; 5]$ число -10 , число 1, число 5;

в) $[-1; 5]$ число -6 , число -1 , число 5 ;

г) $[-1; 5]$ число -1 , число 0 , число 5 .

103. Установите, принадлежит ли промежутку $(-5, 2; 7)$ число:

а) -2 ; в) 7 ; д) $-5, 3$; ж) 10 ;

б) -6 ; г) $-5, 1$; е) 0 ; з) $5, 2$.

104. Запишите целые числа, принадлежащие промежутку:

а) $(-5; 3)$; б) $[-7, 1; 1]$; в) $(-0, 1; 8, 2]$; г) $[-2; 3, 03]$.

105. Назовите наибольшее и наименьшее целые числа из промежутка:

а) $(-15; -7)$; в) $(-1, 01; 6, 4]$;

б) $[-4, 2; 10]$; г) $[2; 13, 03]$.

106. Принадлежит ли промежутку $(-\infty; -2)$ число $-2, 01$; $-1, 99$? Запишите два числа, большие $-2, 02$ и принадлежащие этому промежутку. Есть ли в этом промежутке наибольшее число; наименьшее число?

107. Прочитайте и на координатной прямой представьте промежутки:

а) $(-2; 5)$; г) $[2; 7)$; ж) $(3; +\infty)$; к) $[4; +\infty)$;

б) $(0; 6]$; д) $(-5; -1)$; з) $(-\infty; 3]$; л) $(-\infty; -5)$;

в) $[-3; 6]$; е) $(-8; -3]$; и) $[-4; +\infty)$; м) $(-\infty; 0]$.

108. На координатной прямой представьте множество чисел, удовлетворяющих неравенству:

а) $m < 5$; в) $z > 12$; д) $s < -4$;

б) $n \geq 7$; г) $t \leq -5$; е) $r \geq 0$.

109. На координатной прямой изобразите промежутки:

а) $[-5; 0]$; д) $(-6; -3]$; и) $[-2; +\infty)$;

б) $[0; 7)$; е) $[-8; 1)$; к) $(11; +\infty)$;

в) $(-1; 5)$; ж) $[6; +\infty)$; л) $(-\infty; -13]$;

г) $(4; 8]$; з) $(-\infty; 1)$; м) $(-\infty; 0)$.

110. Запишите промежуток, изображенный на рисунке:

а) 34 ; б) 35 ; в) 36 ; г) 37 ; д) 38 ; е) 39 .



Рис. 34



Рис. 35



Рис. 36



Рис. 37



Рис. 38



Рис. 39

111. Оцените значения выражений $a + b$, $a - b$, ab и $\frac{a}{b}$, учитывая, что:

- а) $2 < a < 3$ и $9 < b < 10$; в) $2 \leq a \leq 3$ и $9 < b < 10$;
 б) $2 \leq a < 3$ и $9 < b \leq 10$; г) $2 \leq a < 3$ и $9 \leq b \leq 10$.

112. Линейкой с миллиметровыми делениями измерили радиус r окружности и определили, что $50 < r < 51$. Приняв $\pi = 3,14$, оцените:

- а) длину C окружности; б) площадь S круга.

113. Измерили линейкой с миллиметровыми делениями длину a и ширину b прямоугольника: $6,2 \text{ см} < a < 6,3 \text{ см}$ и $3,9 \text{ см} < b < 4,0 \text{ см}$. Оцените:

- а) периметр P прямоугольника;
 б) площадь S прямоугольника.

114. Измерили длину a , ширину b и высоту h комнаты прямоугольной формы и нашли (в метрах), что: $8,1 < a < 8,2$, $5,5 < b < 5,6$ и $3,1 < h < 3,2$. Оцените:

- а) площадь S комнаты;
 б) вместимость V комнаты.

115. Сделайте необходимые измерения и оцените периметр и площадь фигуры, изображенной на рисунке:

- а) 40; в) 42; д) 44; ж) 46.
 б) 41; г) 43; е) 45;

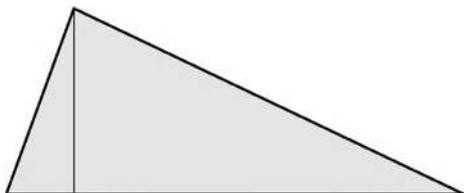


Рис. 40

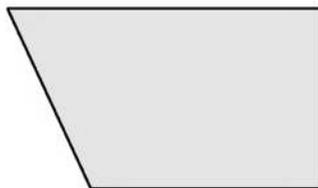


Рис. 41

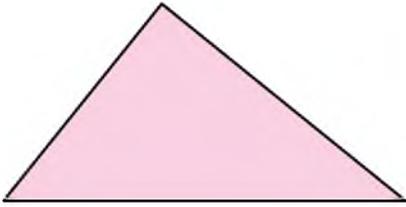


Рис. 42

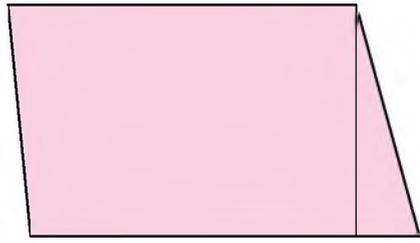


Рис. 43

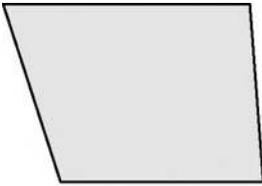


Рис. 44

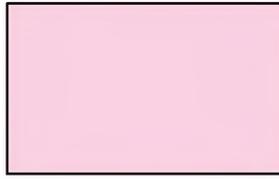


Рис. 45

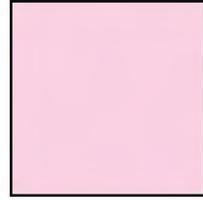


Рис. 46

116. Транспортиром с делениями в 1° измерили углы A и B треугольника ABC : $61^\circ < A < 62^\circ$; $110^\circ < B < 111^\circ$. Оцените величину третьего угла.

117. На прямой выбраны точки P , Q , R . Какой может быть длина отрезка PR , если:

- а) $PQ = 7,1$ см, $QR = 9,6$ см; б) $PQ = 4,3$ дм, $QR = 3,6$ дм?

118. На прямой выбран 21 отрезок так, что эти отрезки целиком закрывают данный отрезок длиной 13 см. Докажите, что хотя бы один отрезок длиннее 0,6 см.

119. Когда развернули поверхность конуса на плоскость, то образовался сектор с радиусом 15 см и углом 120° и круг основания конуса (рис. 47). Найдите радиус этого основания.

120. Когда развернули на плоскость поверхность пирамиды, основанием которой является квадрат, а боковыми гранями — равнобедренные треугольники, то образо-

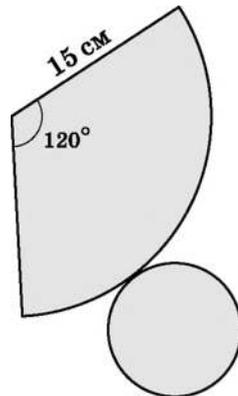


Рис. 47

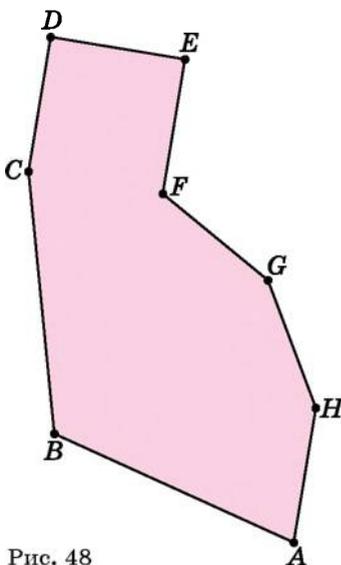


Рис. 48

вался многоугольник $ABCDEFGH$ (рис. 48), угол ABC которого равен 120° .

- а) Найдите углы этого многоугольника;
 б) докажите, что точки E , G и H лежат на одной прямой.

121. Найдите значение многочлена $49a^2 - 28a + 2$ при значении переменной a , равном:

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| а) -3 ; | д) $-\frac{2}{7}$; | и) $\frac{3}{14}$; |
| б) -2 ; | е) 0 ; | к) 1 ; |
| в) -1 ; | ж) $\frac{2}{7}$; | л) 2 ; |
| г) $-\frac{5}{7}$; | з) $\frac{5}{7}$; | м) 3 . |

122. Упростите выражение:

- | | |
|---|--|
| а) $\frac{7a}{a-b} - \frac{2a}{b-a}$; | г) $\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2} + \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$; |
| б) $\frac{2x+z}{z-1} - \frac{3x+5z}{1-z}$; | д) $\frac{k^2 + l^2}{k^2 - l^2} - \frac{k^2 - l^2}{l^2 + k^2}$; |
| в) $\frac{c+5}{3c-2} - \frac{7-2c}{2-3c}$; | е) $\frac{5-3d}{d} + \frac{3}{2d} + \frac{2d-3}{3+2d}$. |

123. Запишите числа:

- а) 32 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; $0,5$; $0,25$; $0,125$; $0,0625$; $0,03125$ степенями с основанием 2 ;
 б) $\frac{1}{729}$; $\frac{1}{243}$; $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{3}$; 1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81 ; 243 ; 729 степенями с основанием 3 .

124. Определите произведение двух чисел, учитывая, что если первое число увеличить на 5 , то это произведение увеличится на 560 , а если второе число уменьшить на 3 , то произведение уменьшится на 411 .

125. Заказ планировалось выполнить за 40 дней. Но заказ увеличили на 116 изделий, и потому работа над ним продолжалась на 2 дня дольше, хотя дневная выработка увеличилась на 2 изделия. Каким был первоначальный заказ?

126. Петя с дядей Антосем катаются в парке на велосипедах по круговой дорожке длиной 1,2 км. Если они едут навстречу, то встречаются каждые 3 мин, а если в одном направлении, то Петя догоняет дядю Антося каждые 12 мин. С какой скоростью едет дядя Антось и с какой Петя?

* * *

127. (Из коллекции профессора Брайена.) На этот раз профессор положил на стол карточки, показанные на рисунке 49.



Рис. 49

— А что, сегодня также на одной карточке надпись истинная, а на другой ложная?

— Нет, теперь обе надписи или истинны, или ложны.

Какую карточку нужно перевернуть, чтобы выиграть 10 фунтов?

128. Есть ли такой год, в котором ни одно тринадцатое число не является понедельником? А какое наибольшее количество понедельников может быть на протяжении года тринадцатыми числами?

129. Известно, что открытый конверт (рис. 50) можно нарисовать одним росчерком, т. е. не отрывая карандаш от бумаги и не проводя им по одной линии дважды. Как это делается? Попробуйте так же нарисовать пять олимпийских колец (рис. 51). Объясните, почему нельзя одним росчерком нарисовать закрытый конверт (рис. 52).

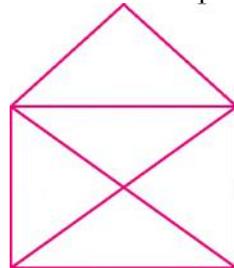


Рис. 50

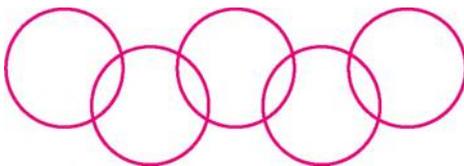


Рис. 51

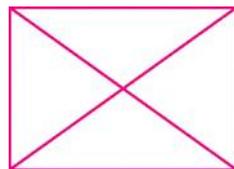


Рис. 52

4. Линейные неравенства с одной переменной

А. Рассмотрим неравенство с переменной $3a - 8 < 13$.

При $a = 6$ это неравенство обращается в высказывание $3 \cdot 6 - 8 < 13$, которое истинно. При $a = 8$ оно обращается в высказывание $3 \cdot 8 - 8 < 13$, которое ложно.

Определение 2. Число, обращающее неравенство с переменной в истинное числовое неравенство, называют **решением неравенства**.

Определение 3. Решить неравенство означает найти все его решения или доказать, что их нет.

Определение 4. Равносильными неравенствами называют неравенства, которые имеют одни и те же решения.

Неравенства, не имеющие решений, также считаются равносильными.

Теоремы 3, 5 и 6 позволяют доказать утверждение, которым пользуются при решении неравенств.

Чтобы получить неравенство, равносильное данному, можно:

- перенести с противоположным знаком слагаемое из одной части неравенства в другую;
- умножить или разделить левую и правую части неравенства на одно и то же положительное число;
- умножить или разделить левую и правую части неравенства на одно и то же отрицательное число, заменив знак неравенства знаком противоположного смысла.

Пример 1. Решим неравенство $3a - 8 < 13$.

Перенесем слагаемое -8 из левой части неравенства в правую с противоположным знаком и приведем подобные:

$$3a < 13 + 8;$$

$$3a < 21.$$

Разделим левую и правую части неравенства на положительное число 3:

$$a < 7.$$



Рис. 53

Получили простейшее неравенство, которое показывает, что множество решений состоит из всех чисел, меньших 7. Это числовой промежуток $(-\infty; 7)$, изображенный на рисунке 53.

Ответ можно записывать как простейшим неравенством, так и числовым промежутком.

Пример 2. Решим неравенство $7 - 4c \leq 5(c - 4) - 3$.

Раскроем скобки в правой части неравенства:

$$7 - 4c \leq 5c - 20 - 3.$$

Перенесем с противоположными знаками слагаемое $5c$ из правой части в левую, а слагаемое 7 — из левой части в правую и приведем подобные:

$$-4c - 5c \leq -20 - 3 - 7;$$

$$-9c \leq -30.$$

Разделим левую и правую части неравенства на -9 и вместе с этим заменим знак неравенства \leq знаком \geq :

$$c \geq \frac{-30}{-9}, \text{ или } c \geq 3\frac{1}{3}.$$

Получили, что множеством решений неравенства является промежуток $\left[3\frac{1}{3}; +\infty\right)$, изображенный на рисунке 54.

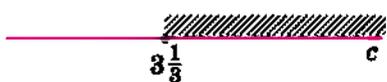


Рис. 54

Ответ. $\left[3\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Пример 3. Решим неравенство $\frac{2x+3}{5} - \frac{5x+8}{3} \leq \frac{3-2x}{15}$.

Умножим левую и правую части неравенства на НОК знаменателей дробей неравенства, т. е. на число 15:

$$\frac{2x+3}{5} \cdot 15 - \frac{5x+8}{3} \cdot 15 \leq \frac{3-2x}{15} \cdot 15; \quad 6x + 9 - 25x - 40 \leq 3 - 2x.$$

Соберем слагаемые с переменной в левой части неравенства, а слагаемые-числа — в правой и приведем подобные:

$$6x - 25x + 2x \leq 3 - 9 + 40;$$

$$-17x \leq 34.$$

Разделим левую и правую части неравенства на -17 :

$$x \geq -2.$$

Множеством решений неравенства является промежуток $[-2; +\infty)$, представленный на рисунке 55.



Рис. 55

Ответ. $x \geq -2$.

Пример 4. Решим неравенство $6(d - 3) + 5d > 12(d - 1) - d$.

Раскроем скобки и выполним перенесение слагаемых:

$$6d - 18 + 5d > 12d - 12 - d;$$

$$6d + 5d - 12d + d > -12 + 18.$$

После приведения подобных получаем: $0 \cdot d > 6$.

Это неравенство не имеет решений, поскольку оно при любом значении переменной d преобразуется в числовое неравенство $0 > 6$, которое ложно. Поэтому не имеет решений и данное неравенство, поскольку оно равносильно неравенству $0 \cdot d > 6$.

Ответ. Неравенство не имеет решений.

Пример 5. Решим неравенство $7(3 + k) \geq 3(k + 5) + 4k - 13$.

Имеем:

$$21 + 7k \geq 3k + 15 + 4k - 13;$$

$$7k - 3k - 4k \geq 15 - 13 - 21;$$

$$0 \cdot k \geq -19.$$

При любом значении переменной k неравенство $0 \cdot k \geq -19$ превращается в числовое неравенство $0 \geq -19$, которое истинно. Поэтому его решением является любое число. Это означает, что и исходное неравенство своим решением имеет любое число.

Ответ. Решение неравенства — любое число.

Б. Во всех рассмотренных примерах решение неравенства сводилось к одному из простейших неравенств: $ax < b$; $ax > b$; $ax \geq b$; $ax \leq b$.

Определение 5. Каждое из неравенств

$$ax < b; ax > b; ax \geq b; ax \leq b,$$

где x — переменная, а a и b — некоторые числа, называется **линейным неравенством с одной переменной**.

Рассмотрим решение неравенства $ax < b$ в общем виде.



Рис. 56

Пусть $a > 0$. Разделив левую и правую части неравенства $ax < b$ на a , получаем: $x < \frac{b}{a}$ (рис. 56).

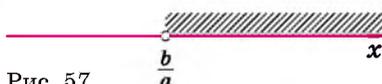


Рис. 57

Пусть $a < 0$. Разделив левую и правую части неравенства $ax < b$ на a и заменив знак $<$

знаком $>$, получаем: $x > \frac{b}{a}$ (рис. 57).

Остается рассмотреть случай, когда $a = 0$. Тогда неравенство $ax < b$ имеет вид $0 \cdot x < b$. При любом значении переменной x получается числовое неравенство $0 < b$. Оно истинно, если число b положительно, и ложно в обратном случае, т. е. если число b неположительно. Таким образом, если $a = 0$ и $b > 0$, то решением неравенства $ax < b$ является любое число, а если $a = 0$ и $b \leq 0$, то неравенство $ax < b$ не имеет решений.

Ход рассуждений при решении неравенства $ax < b$ наглядно представлен схемой на рисунке 58.

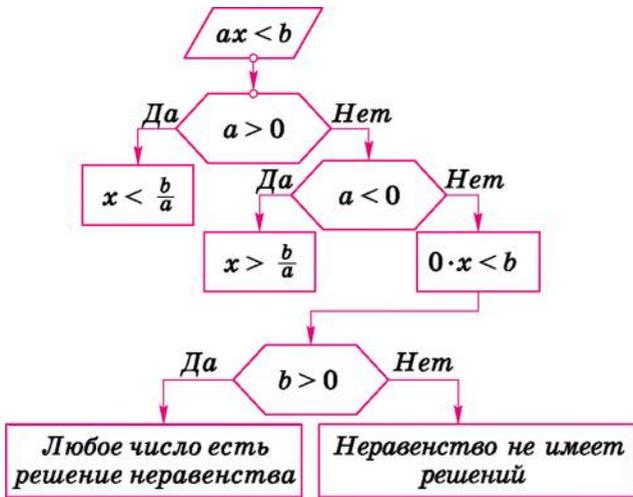


Рис. 58

Ответ. Если $a > 0$, то $x < \frac{b}{a}$;

если $a < 0$, то $x > \frac{b}{a}$;

если $a = 0$ и $b > 0$, то решением неравенства $ax < b$ является любое число;

если $a = 0$ и $b \leq 0$, то неравенство $ax < b$ не имеет решений.

- ?
1. Какое число называют решением неравенства?
 2. Что означает требование *решить неравенство*?
 3. Какие неравенства называют равносильными?
 4. Назовите преобразования, приводящие к неравенствам, равносильным исходному неравенству.
 5. Как можно записать ответ на задание *решить неравенство*?
 6. Какие неравенства называют линейными неравенствами с одной переменной?

130. Определите, является ли решением неравенства $7x < 4(x - 3) + 3$ число:

- а) -10 ; в) $-3,5$; д) -3 ; ж) 0 ;
 б) 10 ; г) $3,5$; е) 3 ; з) $\frac{1}{8}$.

131. Из чисел -4 ; $-2\frac{2}{3}$; 0 ; 6 ; $7,5$; 10 ; $11\frac{3}{14}$ выберите те, которые являются решениями неравенства $5a - 3 \geq 3a + 12$.

132. Запишите одно число, являющееся решением неравенства $b + 5 \geq 3b$, и одно число, не являющееся его решением.

133. Изобразите на координатной прямой множество решений неравенства:

- а) $a + 3 > 0$; в) $c + 4 < 0$; д) $-4p \geq 20$; ж) $5s \leq 30$;
б) $b - 3 > 0$; г) $d - 4 < 0$; е) $4q \geq -20$; з) $-5h \leq -30$.

134. Решите неравенство:

- а) $3a < 12$; в) $4g > -12$; д) $5k \leq -10$; ж) $-2p \geq -10$;
б) $-3b < 15$; г) $4h > 20$; е) $5l \leq 15$; з) $-2q \geq 16$.

135. Решите неравенство $4t - 3 \leq 11$ и определите, является ли его решением число:

- а) -4 ; б) 4 ; в) $-\frac{3}{8}$; г) $\frac{3}{8}$; д) 6 ; е) -6 .

136. Решите неравенство $6u + 5 \geq 14$ и укажите три целых и три дробных его решения.

137. Решите неравенство:

- а) $6z - 1,7 < 1,3$; д) $42 - 3v > 36 - v$;
б) $1 - 4y \geq -0,6$; е) $29 + 7u \leq 18 - 4u$;
в) $3x - 19 > -4$; ж) $76 - 12t > 1 - 2t$;
г) $3 - 5w \leq 18$; з) $12 + 5s \geq 15 + 11s$.

138. Определите, при каких значениях переменной многочлен:

- а) $9h - 45$ принимает положительные значения;
б) $11 - 4g$ принимает отрицательные значения;
в) $14 - 21f$ принимает неотрицательные значения;
г) $21b + 14$ принимает неположительные значения;
д) $18e - 45$ принимает значения, большие 36;
е) $8d - 23$ принимает значения, не большие -9 ;
ж) $11c - 3$ принимает значения, меньшие 41;
з) $36a + 19$ принимает значения, не меньшие -41 .

139. Решите неравенство:

- а) $7x \leq 2(3x - 1) - 3$; д) $4 + 3(3 - 5t) \geq 3t - 4(7t - 3)$;
б) $11z - 3(5z + 2) > 2z$; е) $2(3s + 4) - 7 < 4(4s + 3) - 5s$;
в) $13y + 3 < 7y - 6(y + 3)$; ж) $3 - 8(4p - 1) \leq 6p + 4(3p - 11)$;
г) $9 - 3u > 6u + 5(3 - 4u)$; з) $10(r - 9) - 8r \geq 3r - 11(5r + 6)$.

140. Решите неравенство:

- а) $\frac{3a}{5} > 4$; д) $3 > \frac{5-f}{7}$; и) $8 \leq \frac{3}{8}(u-4)$;
б) $\frac{b}{4} \leq 3$; е) $\frac{4g+5}{7} \geq 0$; к) $\frac{7}{12}w < 14$;
в) $\frac{5c}{6} > 0$; ж) $\frac{15-7h}{79} \leq 0$; л) $10 \geq \frac{9s+2}{20}$;
г) $\frac{2d-3}{4} \geq 2$; з) $\frac{1}{6}(k+5) > 24$; м) $\frac{7}{9}(2p-7) < 0$.

141. Определите, при каких значениях переменной значение дроби:

- а) $\frac{6-5a}{4}$ больше значения дроби $\frac{6a-5}{6}$;
б) $\frac{4b-6}{3}$ не больше значения дроби $\frac{6b-4}{9}$;
в) $\frac{7c-3}{5}$ меньше значения двучлена $3c+5$;
г) $\frac{11e+5}{4}$ не меньше значения двучлена $3e-12$.

142. Определите, при каких значениях переменной значение дроби:

- а) $\frac{c}{3}$ на 4 меньше значения дроби $\frac{c+1}{4}$;
б) $\frac{x-3}{5}$ на 7 больше значения дроби $\frac{x+1}{4}$;
в) $\frac{3y-5}{6}$ меньше значения разности дробей $\frac{3-y}{9}$ и $\frac{6y-7}{15}$;
г) $\frac{2d+5}{18}$ не больше значения суммы дробей $\frac{7d-3}{6}$ и $\frac{2-5d}{4}$.

143. Изобразите на координатной прямой множество решений неравенства:

- а) $\frac{11x-2}{2} < 3x$; в) $\frac{z}{3} - \frac{z}{4} \geq 3$; д) $\frac{4s}{5} + 3s \leq 7$;
б) $\frac{7-3y}{3} \leq 4y$; г) $\frac{2t}{5} - \frac{t}{4} > 1$; е) $5r + \frac{5r}{7} > 10$.

144. Решите неравенство:

- а) $\frac{2x-1}{2} - \frac{2x-3}{5} \leq x$; г) $\frac{5r-1}{4} + \frac{r+1}{2} < r$;
б) $y - \frac{2y+3}{2} \geq \frac{y-1}{4}$; д) $\frac{2s-1}{3} + \frac{2s-1}{6} \geq 4s$;
в) $3t + \frac{3t+1}{5} \geq \frac{7t-3}{15}$; е) $\frac{u-1}{2} - \frac{2u+3}{8} - u < 2$.

145. Определите, при каких значениях переменной значение выражения $7a - \frac{6a-8}{7}$:

- а) отрицательно; в) положительно;
б) равно нулю; г) больше 10.

146. Решите неравенство:

- а) $\frac{4}{3a+9} > 0$; в) $\frac{0,7}{0,8c-3} > 0$; д) $\frac{-9,1}{0,6m-1,8} < 0$;
б) $\frac{7}{2b-6} < 0$; г) $\frac{-3,8}{4,2k+1,4} < 0$; е) $\frac{-12,6}{3,2u+4,8} > 0$.

147. Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

- а) $2 + 7a > 4(a - 1)$; в) $4s + 1 \geq 3(s - 2) - 2s$;
б) $3(b - 2) < 4b - 9$; г) $2(d - 1) - 3d \leq 6d + 1$.

148. При каких натуральных значениях переменной значение выражения:

- а) $2(1 - k) - 5(k - 5) + 2$ положительно;
б) $8,2 + 3l - (30,2 - 5l)$ отрицательно?

149. Найдите область определения выражения:

- а) $\frac{a}{b+5}$; в) $\frac{p+8}{q+7}$; д) $\frac{6a+8}{s^2-4}$; ж) $\frac{y^2+xz}{|y|-3}$;
б) $\frac{1-y}{x-3}$; г) $\frac{z-7}{3(y-1)}$; е) $\frac{m+l}{1-k^2}$; з) $\frac{b^2+9c}{a^2+2}$.

150. Сторона прямоугольника равна 7 см. Какой должна быть другая сторона, чтобы его периметр был меньше периметра квадрата со стороной 5 см?

151. Путешественники на моторной лодке поплыли против течения реки и должны возвратиться назад не позже чем через 3 ч. На какое расстояние они могут отплыть, если собственная скорость лодки равна 18 км/ч, а скорость течения реки — 2 км/ч?

152. Ученики получили задание посадить 40 деревьев. Сколько деревьев им нужно посадить, если они намереваются перевыполнить задание не менее чем на 6 %?

153. Одна сторона треугольника равна 7 см, другая — 12 см. Какой может быть третья сторона треугольника? Запишите натуральные значения длины этой стороны.

154. Сумма четного числа и утроенного следующего за ним четного числа не больше 85. Найдите наибольшее число, удовлетворяющее этому условию.

155. На гонках велосипедисты должны проехать по маршруту Лида — Пружаны (рис. 59). Они стартуют с интервалом 6 мин. С какой скоростью должен ехать третий велосипедист, чтобы приехать к финишу раньше первого, который едет со скоростью 40 км/ч?

156. Постройте график зависимости $y = 2x - 1$ и определите, при каких значениях переменной x точки графика расположены:

- а) выше оси абсцисс;
- б) ниже оси абсцисс;
- в) выше точек прямой $y = -3$;
- г) ниже точек прямой $y = 3$.



Рис. 59

157. Площадь треугольника 28 м^2 . Какой должна быть сторона a треугольника, если высота, проведенная к ней, не меньше 14 м?

158. Площадь треугольника равна 32 см^2 . Какой должна быть высота h треугольника, если сторона, к которой она проведена, не больше 8 см?

159. Измерения основания прямоугольного параллелепипеда равны 15 дм и 6 дм. Какой должна быть высота h параллелепипеда (рис. 60), чтобы его объем был не больше объема куба с ребром 9 дм?

160. Боковая поверхность прямоугольного параллелепипеда равна 176 см^2 , а его высота — 8 см. Какими могут быть измерения основания параллелепипеда, если одно из них составляет не больше 120 % другого?

161. Площадь сельскохозяйственных угодий Сморгонского района в 1,5 раза больше площади лесов и составляет 300 % площади иных земель. Найдите распределение земель Сморгонского района, зная, что леса и иные земли занимают $751,5 \text{ км}^2$.

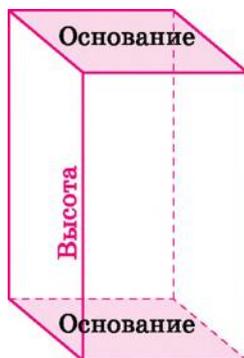


Рис. 60

162. Представьте степень с простым основанием число:

- а) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{100}$; ж) $\frac{1}{81}$; к) $\frac{1}{29}$;
б) $\frac{1}{16}$; д) $\frac{1}{7}$; з) $\frac{1}{27}$; л) $\frac{1}{64}$;
в) $\frac{1}{8}$; е) $\frac{1}{17}$; и) $\frac{1}{25}$; м) $\frac{1}{79}$.

163. Найдите значение выражения:

- а) 3^{-4} ; г) 2^{-5} ; ж) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$; к) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;
б) 5^{-3} ; д) 7^{-3} ; з) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$; л) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$;
в) 13^{-2} ; е) 6^{-4} ; и) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$; м) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-4}$.

164. Вычислите:

- а) $2a^2b^{-3}$ при $a = 4$, $b = 3$; в) $\frac{2m^2n^4}{81p^6}$ при $m = 3$, $n = 2$, $p = 5$;
б) $3x^{-2}y^4$ при $x = 10$, $y = -2$; г) $\frac{64r^0s^4}{5t^8}$ при $r = 6$, $s = 4$, $t = 1$.

165. Разложите на множители:

- а) $ab + b^2 + ac + bc$; г) $pq - q^2 + 2q - 2p$;
б) $x^2 + 4x - xy - 4y$; д) $12uv + 2v^2 - 6u - v$;
в) $m^2 + mn + mp + np$; е) $cd - 7d + 4c - 28$.

166. Точки M , N , O , P принадлежат одной прямой. Найдите расстояние между серединами отрезков MN и OP , учитывая, что:

- а) $MN = 1,5$, $NO = 1,4$, $OP = 2,2$, $MP = 5,1$;
б) $MO = 1,3$, $ON = 2,6$, $NP = 3,5$, $MP = 7,4$;
в) $MO = 7$, $NP = 11$.

167. Сумма двух чисел равна 13,2. Если первое число увеличить вдвое, а второе — вдвое уменьшить, то сумма станет равной 15. Какие это числа?

168. Заказ по сборке электродвигателей выполняли три бригады. Первая выполнила $\frac{7}{25}$ заказа, вторая — на 40 % больше первой, а третья собрала остальных 410 двигателей. Сколько двигателей нужно было собрать?

169. Вместимость трех емкостей — 18 л. Если первую емкость наполнить водой, а затем перелить ее в две остальные, то или заполнится вторая и $\frac{1}{5}$ третьей, или третья и $\frac{1}{3}$ второй. Какова вместимость каждой емкости?

* * *

170. Друг за другом записали по возрастанию 100 последовательных чисел, начиная с числа 2000. В полученной записи вычеркнули все цифры 2. Какая цифра записана теперь на сто тридцать седьмом месте?

171. Восстановите треугольник по его основанию и точке пересечения высот.

172. (Из коллекции профессора Брайена.)

— Поищите сегодня счастья, учитывая, что снова обе надписи на карточках одновременно истинны или ложны.

С этими словами профессор положил на стол карточки, показанные на рисунке 61.

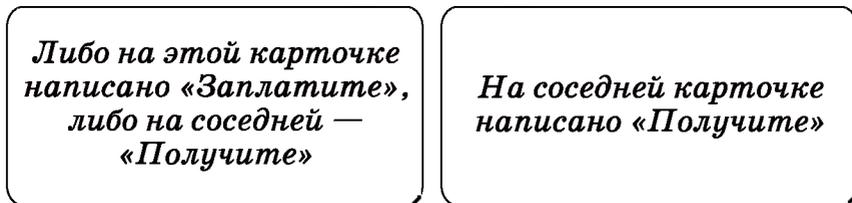


Рис. 61

Какую карточку нужно перевернуть, чтобы выиграть 10 фунтов?

5. Системы линейных неравенств с одной переменной

А. Задача. В пяти одинаковых коробках содержится меньше 120 конфет, а в семи таких же коробках — больше 160 конфет. Сколько конфет в одной коробке?

Обозначим n количество конфет в одной коробке. Тогда в пяти коробках находится $5n$, а в семи — $7n$ конфет. По условию задачи:

$$5n < 120 \text{ и } 7n > 160.$$

Полученные условия можно записать так:

$$n < 24 \text{ и } n > 22\frac{6}{7}.$$

Правообладатель Народная асвета

Поскольку, в соответствии с условием задачи, n — количество конфет, то нас интересует такое натуральное значение переменной n , которое удовлетворяет и условию $n < 24$, и условию $n > 22\frac{6}{7}$ (рис. 62), т. е. число 23.

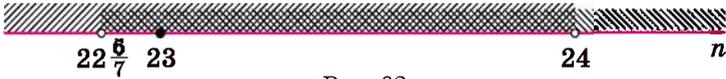


Рис. 62

Ответ. В коробке 23 конфеты.

При решении задачи мы получили условия $5n < 120$ и $7n > 160$, причем по смыслу задачи должны выполняться как условие $5n < 120$, так и условие $7n > 160$. В таких случаях говорят о **системе условий**. Систему, образованную неравенствами $5n < 120$ и $7n > 160$, записывают

$$\begin{cases} 5n < 120, \\ 7n > 160. \end{cases}$$

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором истинно каждое из неравенств системы.

Решить систему неравенств означает найти все ее решения или установить, что их нет.

Например, число 2 является решением системы $\begin{cases} 2x \geq -3, \\ 3x < 9, \end{cases}$

поскольку истинно как неравенство $2 \cdot 2 \geq -3$, так и неравенство $3 \cdot 2 < 9$. Число -2 не является решением этой системы, поскольку ложно неравенство $2 \cdot (-2) \geq -3$.

Б. Пример 1. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 2b - 3 \geq 13, \\ 3 - b < 1. \end{cases}$$

Последовательно получаем:

$$\begin{cases} 2b \geq 13 + 3, & 2b \geq 16, & b \geq 8, \\ -b < 1 - 3; & -b < -2; & b > 2. \end{cases}$$

Множество решений каждого из неравенств $b \geq 8$ и $b > 2$ изобразим на координатной прямой. Получим рисунок 63. Решениями системы неравенств являются значения переменной b , удовлетворяющие как неравенству $b \geq 8$, так и нера-

венству $b > 2$, т. е. принадлежат обоим промежуткам $[8; +\infty)$ и $(2; +\infty)$. Рисунок 63 позволяет понять, что множеством общих чисел этих промежутков является промежуток $[8; +\infty)$.

Ответ. $[8; +\infty)$.



Рис. 63

Пример 2. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 5c + 4 > 2(c - 3), \\ c - 11 \geq 3(c - 7). \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases} 5c + 4 > 2c - 6, \\ c - 11 \geq 3c - 21; \end{cases} \quad \begin{cases} 3c > -10, \\ -2c \geq -10; \end{cases} \quad \begin{cases} c > -3\frac{1}{3}, \\ c \leq 5. \end{cases}$$

Используя координатную прямую, найдем значения переменной c , удовлетворяющие обоим неравенствам системы. По рисунку 64 видно, что такими значениями являются числа

промежутка $\left(-3\frac{1}{3}; 5\right]$.

Ответ. $\left(-3\frac{1}{3}; 5\right]$.



Рис. 64

Пример 3. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 3(2d - 5) \geq 2(4d + 3), \\ 2(7d + 1) \leq 5(4d - 5). \end{cases}$$

$$\text{Имеем: } \begin{cases} 6d - 15 \geq 8d + 6, \\ 14d + 2 \leq 20d - 25; \end{cases} \quad \begin{cases} -2d \geq 21, \\ -6d \leq -27; \end{cases} \quad \begin{cases} d \leq -10,5, \\ d \geq 4,5. \end{cases}$$

Используя рисунок 65, найдем, что значений переменной d , удовлетворяющих обоим неравенствам $d \leq -10,5$ и $d \geq 4,5$, нет.

Ответ. Система не имеет решений.



Рис. 65

Пример 4. Решим неравенство $19 \leq 5 - 7k < 26$.

Двойное неравенство $19 \leq 5 - 7k < 26$ означает, что:

$$19 \leq 5 - 7k \text{ и } 5 - 7k < 26,$$

т. е. двойное неравенство является системой двух неравенств:

$$\begin{cases} 5 - 7k \geq 19, \\ 5 - 7k < 26. \end{cases}$$

Решим ее:

$$\begin{cases} -7k \geq 14, \\ -7k < 21; \end{cases} \quad \begin{cases} k \leq -2, \\ k > -3. \end{cases}$$



Рис. 66

Как показывает рисунок 66, двойному неравенству $19 \leq 5 - 7k < 26$ удовлетворяют числа промежутка $(-3; -2]$.

Записи при решении двойного неравенства удобно вести иначе:

$$\begin{aligned} 19 &\leq 5 - 7k < 26; \\ 19 - 5 &\leq -7k < 26 - 5; \\ 14 &\leq -7k < 21; \\ \frac{14}{-7} &\geq k > \frac{21}{-7}; \\ -2 &\geq k > -3; \\ -3 &< k \leq -2. \end{aligned}$$

Ответ. $-3 < k \leq -2$.



1. Какое число называют решением системы неравенств с одной переменной?
2. Что означает требование *решить систему неравенств с одной переменной*?

173. Определите, является ли число 3 решением системы неравенств:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 2a < 7a - 1, \\ 4a > 5a - 34; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 5c + 8 < 24, \\ 11 - 2c > -1; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} 7b + 6 \geq 9b, \\ 5 - 2b < 2b - 1; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 8 < 2d - 14, \\ 9d + 12 \leq -7. \end{cases} \end{array}$$

174. Определите, является ли решением системы неравенств $\begin{cases} 5z - 22 < 0, \\ 2z + 3 \geq 7 \end{cases}$ число:

- а) 3; в) 2,7; д) 2; ж) 0;
 б) 1; г) -2,7; е) $3\frac{2}{3}$; з) $2\frac{1}{7}$.

175. Решите систему неравенств:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} m < 2, \\ m < 7; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} n > 11, \\ n > 17; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} k > 0, \\ k < 9; \end{cases} \end{array}$$

$$\text{г)} \begin{cases} l < -2, \\ l > 2; \end{cases} \quad \text{е)} \begin{cases} q < -7, \\ q \geq -17; \end{cases} \quad \text{з)} \begin{cases} s \geq -6, \\ s > -6,7. \end{cases}$$

$$\text{д)} \begin{cases} p \leq -5, \\ p < 0; \end{cases} \quad \text{ж)} \begin{cases} r \leq 2, \\ r \geq -7; \end{cases}$$

176. Решите систему неравенств:

$$\text{а)} \begin{cases} 3e - 15 > 0, \\ 5e < 30; \end{cases} \quad \text{г)} \begin{cases} 7h + 21 < 0, \\ 6h \geq 42; \end{cases} \quad \text{ж)} \begin{cases} 10 - 2u \geq 0, \\ 4u - 8 \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 7f < -7, \\ 6 - f > 0; \end{cases} \quad \text{д)} \begin{cases} 3i - 18 \geq 0, \\ 5i \geq 15; \end{cases} \quad \text{з)} \begin{cases} 6 - 2v > 0, \\ 3v + 6 > 0; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 5g - 26 \leq 0, \\ 10g > 0; \end{cases} \quad \text{е)} \begin{cases} 3 - 2j \geq 0, \\ 4j + 8 < 0; \end{cases} \quad \text{и)} \begin{cases} 12 + 5v \leq 0, \\ 5v - 3 \geq 0. \end{cases}$$

177. Решите систему неравенств:

$$\text{а)} \begin{cases} 5,6 \geq 2,8a, \\ 0,3a + 3,6 \geq 0; \end{cases} \quad \text{д)} \begin{cases} i - 4 \leq 3i - 2, \\ 1,4 - i \geq 2i - 1; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 3,5c + 10,5 \leq 0, \\ \frac{2}{9}c > 2; \end{cases} \quad \text{е)} \begin{cases} k \geq 6 + 5k, \\ k + 20 \geq 15 + 5k; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 0,1e < 1,5, \\ \frac{3}{17}e > 0; \end{cases} \quad \text{ж)} \begin{cases} 9m - 3 \geq m - 1, \\ 12m - 2 < 17m - 3; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} 3g - 9,75 < 0, \\ -\frac{2}{3}g \geq 2; \end{cases} \quad \text{з)} \begin{cases} 21 - 6p \leq p, \\ 3p + 8 > 1,3 + 4p. \end{cases}$$

178. Решите систему неравенств:

$$\text{а)} \begin{cases} 6(a - 2) - 2a > 0, \\ 1 - 3(a - 2) < 0; \end{cases} \quad \text{г)} \begin{cases} 12 \leq x^2 - x(x - 9), \\ 4(3 - 2x) - 3(2 - 3x) \geq x; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 3y - (2y - 5) < 7, \\ y > 2(3y - 1) + 17; \end{cases} \quad \text{д)} \begin{cases} 5(c + 1) - c > 2c + 2, \\ 4(c + 1) - 2 \leq 2(2c + 1) - c; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 9b - 3 \geq 7(b + 3), \\ 3b + 3 \leq 45 + 2(b - 15); \end{cases} \quad \text{е)} \begin{cases} 2(z - 1) - 3 < 5(2z - 1) - 7z, \\ 3(z + 1) - 2 \leq 6(1 - z) + 7z. \end{cases}$$

179. Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} 5(a+1) \leq 1 + 3(a+3), \\ \frac{2a-1}{7} < \frac{a+1}{2}; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{2d+7}{5} \leq \frac{d+3}{2}, \\ \frac{2d-3}{7} - \frac{5}{21} < \frac{d-2}{3}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{3b-2}{4} < \frac{2b-1}{3}, \\ 4 + 3(b-1) \leq b + 2(2b+1); \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} \frac{3-2e}{15} \leq \frac{e-2}{3} + \frac{e}{5}, \\ \frac{1-3e}{12} \geq \frac{5e-1}{3} - \frac{7e}{4}; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{c-5}{6} \leq \frac{3c-1}{4}, \\ \frac{c+2}{3} > \frac{c+3}{5}; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} \frac{7+5f}{2} - \frac{3f}{4} < \frac{11f-7}{12}, \\ \frac{1-3f}{2} + \frac{1-4f}{3} \geq \frac{f}{6} - 1. \end{cases}$$

180. Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{6u-5}{3} - \frac{11}{5} < \frac{4u+5}{5} - 0,6, \\ \frac{8u+1}{2} - \frac{9u}{5} < \frac{6u-1}{5} + 0,1; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2(4t-1) - 3t < 5(t+2) + 7, \\ \frac{t-2}{3} \leq \frac{t-3}{2}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{8v+1}{3} > \frac{4v+9}{2} - \frac{v-1}{3}, \\ \frac{5v-2}{3} \leq \frac{2v+13}{2} - \frac{v+2}{3}; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{3(s-1)}{2} - 1,3s \geq \frac{s}{5} - 1,5, \\ \frac{s+5}{3} > \frac{s-3}{5}. \end{cases}$$

181. Найдите целые решения системы неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} 5 - 2x < 15, \\ 5x < 19; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} q > 0, \\ 5,1 - q \geq 1,9; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 5 - 7d < 19, \\ -1 < 23 - 6d; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 9 - 6r > 0, \\ 3r - 1 \geq 0. \end{cases}$$

182. Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} 2,5y < 0,5(8-y) + y + 1,6, \\ 1,5(2y+2) - y < 2y + 2,9; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3(a+8) \geq 4(7-a), \\ (a+2)(a-5) > (a+3)(a+4). \end{cases}$$

183. Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{u}{3} + \frac{u}{4} < 6, \\ 1 - \frac{u}{5} > 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2t - \frac{t-2}{5} > 4, \\ \frac{t}{2} - \frac{t}{6} \leq 5; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{m-1}{3} - \frac{m-3}{4} < 3, \\ \frac{11m-2}{13} > 0; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \frac{3k+1}{-2} < 1, \\ \frac{k}{8} - 2 < k. \end{cases}$$

184. Решите двойное неравенство:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а) } -4 < 3g - 1 < 5; & \text{в) } 5 \leq 7 - 2u \leq 9; \\
 \text{б) } -9 \leq 4 - h < 1; & \text{г) } -3 < 5v + 2 \leq 17.
 \end{array}$$

185. Решите двойное неравенство и запишите, если возможно, три его решения, одно из которых является целым числом, другое — десятичной дробью, третье — обыкновенной дробью:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а) } -7,2 \leq \frac{7b+6}{5} \leq 22,2; & \text{в) } -5 \leq 1 - 3j < 52; \\
 \text{б) } -2 \leq \frac{5-d}{3} \leq 4; & \text{г) } -1 \leq \frac{7-l}{-4} \leq 1.
 \end{array}$$

186. Решите систему неравенств:

$$\begin{array}{lll}
 \text{а) } \begin{cases} a > 5, \\ a > 4, \\ a > -3; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} b > 8, \\ b < 14, \\ b > 11; \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} z \geq 18, \\ z < 25, \\ z \geq 8; \end{cases} \\
 \text{б) } \begin{cases} x < -3, \\ x < -4, \\ x < 4; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} y < 1, \\ y > 0, \\ y < -1; \end{cases} & \text{е) } \begin{cases} c \leq 4, \\ c \geq 4, \\ c > 2. \end{cases}
 \end{array}$$

187. Решите систему неравенств:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а) } \begin{cases} 3k + 2 > k - 2, \\ k + 15 > 2(3 - k), \\ 5k + 12 \leq k + 24; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 3l - 5 < 8l + 5, \\ 3l - 2 > 6l - 5, \\ 13l - 11 \leq 7l + 1. \end{cases}
 \end{array}$$

188. При каких значениях переменной значения выражений $0,5a + 2$ и $5 - 5a$ вместе:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а) отрицательны;} & \text{в) меньше 4;} \\
 \text{б) положительны;} & \text{г) больше 3?}
 \end{array}$$

189. Одна сторона треугольника равна 6 см, другая — 9 см. Какой может быть третья сторона, если периметр треугольника:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а) меньше 25 см;} & \text{в) не меньше 21 см;} \\
 \text{б) больше 19 см;} & \text{г) не больше 13 см?}
 \end{array}$$

190. Если из $\frac{3}{2}$ длины Локнеи вычесть $\frac{1}{6}$ ее длины, то получится величина, большая 47 км, а если $\frac{1}{5}$ длины, то — величина, меньшая 47 км. Определите с точностью до километра длину Локнеи.

191. Сколько литров 20-процентного раствора соляной кислоты нужно долить к 8 л ее 60-процентного раствора, чтобы концентрация полученного раствора была не больше 40 % и не меньше 30 %?

192. Сколько отрезков и сколько лучей образовалось, если на прямой отметили:

- а) 2 точки A и B ; в) 4 точки A, B, C и D ;
 б) 3 точки A, B и C ; г) 5 точек A, B, C, D и E ?

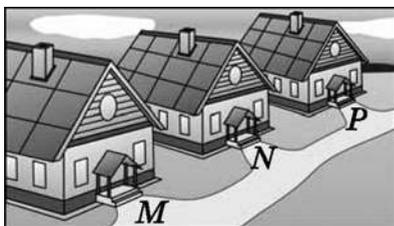


Рис. 67

193. На улице расположено три дома M, N, P (рис. 67). Нужно выбрать место для колодца так, чтобы общий путь, который нужно проделать для того, чтобы один раз в день набрать воды, был наименьшим. Где нужно расположить колодец, если:

- а) в каждом из домов живет по одной семье;
 б) в доме M живет одна семья, в доме N — две семьи, в доме P — три семьи?

194. Когда развернули поверхность конуса (рис. 68) на плоскость, образовалась фигура, состоящая из сектора с углом в 150° и круга основания конуса с радиусом 7,5 дм (рис. 69). Найдите боковую и полную поверхности этого конуса.



Рис. 68

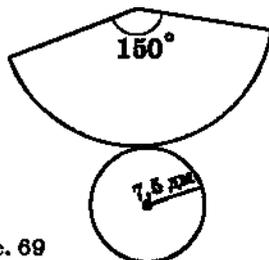


Рис. 69

195. Река Селенга образуется при слиянии Мурэна и Идэра. На схеме, изображенной на рисунке 70, показаны соотношения между длинами этих рек. Составьте задачу и решите ее. Найдите длины водных путей от истоков Мурэна и Идэра до устья Селенги.

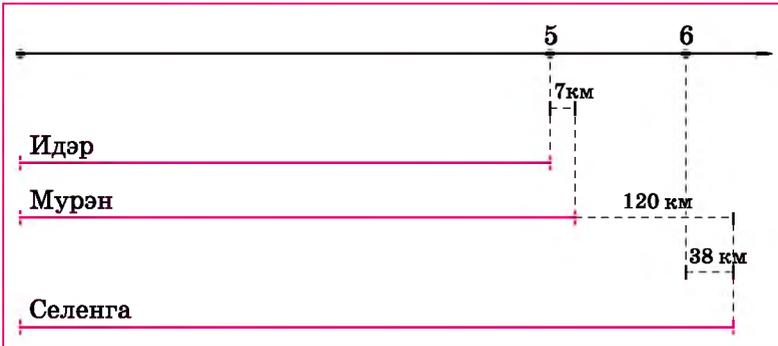


Рис. 70

196. Найдите модуль числа:

- а) 7; в) 0; д) 12,9; ж) $8\frac{13}{111}$;
 б) -7; г) -4,12; е) $-\frac{3}{31}$; з) -0,0009.

197. Найдите значение выражения:

- а) $(|2,8| - |-1,2|) : 0,2$; в) $(|-2,8| - |-1,2|) : 0,2$;
 б) $(|-2,8| - |1,2|) : 0,2$; г) $(|2,8| - |1,2|) : 0,2$.

198. Можно ли утверждать, что:

- а) если $a^2b \geq 0$, то $b \geq 0$; б) если $a^2b > 0$, то $b > 0$?

199. Произведением степеней запишите дробь:

- а) $\frac{a^2}{b^3}$; в) $\frac{m^2n^5}{p^7}$; д) $\frac{2x^2y}{3z^6}$; ж) $\frac{5}{3p^3r^2q}$;
 б) $\frac{c^5}{a^3}$; г) $\frac{u^7}{v^5w^{11}}$; е) $\frac{3k^2}{2l^4n^8}$; з) $\frac{r^{13}}{8s^2t^{11}v^2}$.

200. Решите уравнение:

- а) $\frac{3u^2 - 5}{6} - 2 = \frac{4u^2 - u}{8}$;
 б) $(7 + a)(a - 3) = (a - 4)^2 - 1$;

в) $4x + (x - 4)(x + 4) = (x - 5)(x + 5) - 5x$;

г) $(3n - 5)(3n + 5) = 9(n - 4)(n + 4)$.

201. Пусть $m < 0$. Определите, каким — положительным, отрицательным, равным нулю — является значение выражения:

а) $m - |m|$; г) $-m + |-m|$; ж) $(m)^2 \cdot |-m|$;

б) $|-m| - m$; д) $m^2 \cdot |m|$; з) $\frac{(-m)^3}{|-m|}$;

в) $m + |m|$; е) $\frac{m^3}{|m|}$; и) $\frac{(-m)^4}{m^3}$.

* * *

202. Если к двузначному числу прибавить сумму его цифр, а потом сделать то же самое с полученным числом, то получится число, записанное теми же цифрами, что и первое. Какое это число?

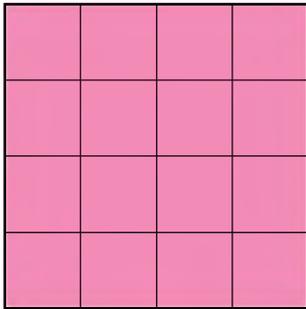


Рис. 71

203. Квадрат размерами 4 на 4 клетки (рис. 71) нужно разрезать на две равные фигуры. Сколькими способами можно это сделать, если разрез разрешается вести по сторонам клеток? (Два разреза считаются разными, если в результате получаются неравные фигуры.)

204. (Из коллекции профессора Брайена.) Проиграв 30 фунтов, профессор Брайен решил усложнить правила.

— Сегодня в игре используются синяя и белая карточки (рис. 72). Только учтите, что если на синей карточке написано «Получите», то утверждение на ее видимой стороне истинно, а если «Заплатите», то ложно. На белой карточке все наоборот: если написано «Получите», то утверждение на ее видимой стороне ложно, а если «Заплатите», то истинно.

Какую карточку нужно перевернуть, чтобы выиграть 10 фунтов?

*На обеих карточках
написано «Получите»*

*На обеих карточках
написано «Получите»*

Рис. 72

6. Уравнения и неравенства с переменной под знаком модуля

А. Мы знаем, что модуль числа y — это расстояние на координатной прямой от начала координат до точки с координатой y . Например, $|6| = 6$, поскольку расстояние от начала координат до числа 6 равно 6 (рис. 73), $|-6| = 6$, поскольку расстояние от начала координат до числа -6 также равно 6 (рис. 74).

Так что $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Поэтому уравнение $|x| = 6$ имеет два корня — числа -6 и 6 .



Рис. 73



Рис. 74

Пример 1. Решим уравнение $|3a - 4| = 11$.

Имеем:

$$3a - 4 = 11 \text{ или } 3a - 4 = -11;$$

$$3a = 11 + 4 \text{ или } 3a = -11 + 4;$$

$$3a = 15 \text{ или } 3a = -7;$$

$$a = 5 \text{ или } a = -2\frac{1}{3} \text{ (рис. 75).}$$



Рис. 75

Ответ. $a_1 = 5$; $a_2 = -2\frac{1}{3}$.

Неравенству $|x| < a$, где $a > 0$, удовлетворяют те и только те значения переменной x , которые на координатной прямой отстоят от начала координат меньше чем на a (рис. 76), т. е. числа промежутка $(-a; a)$.

Но эти же числа удовлетворяют и двойному неравенству $-a < x < a$. Поэтому



Рис. 76

если $a > 0$, то неравенство $|x| < a$ равносильно неравенству $-a < x < a$.

Понятно, что

если $a > 0$, то неравенство $|x| \leq a$ равносильно неравенству $-a \leq x \leq a$.

Пример 2. Решим неравенство $|4b + 3| < 11$.



Рис. 77

Имеем:

$$\begin{aligned} -11 < 4b + 3 < 11; \\ -11 - 3 < 4b < 11 - 3; \\ -14 < 4b < 8; \\ -3,5 < b < 2 \text{ (рис. 77)}. \end{aligned}$$

Ответ. $-3,5 < b < 2$.

Пример 3. Решим неравенство $|23 - 7c| \leq 16$.

Имеем:

$$\begin{aligned} -16 &\leq 23 - 7c \leq 16; \\ -16 - 23 &\leq -7c \leq 16 - 23; \\ -39 &\leq -7c \leq -7; \\ \frac{-39}{-7} &\geq c \geq \frac{-7}{-7}; \end{aligned}$$

$$5\frac{4}{7} \geq c \geq 1;$$

$$1 \leq c \leq 5\frac{4}{7} \text{ (рис. 78)}.$$



Рис. 78

Ответ. $\left[1; 5\frac{4}{7}\right]$.

Это неравенство можно решить и иначе, учитывая, что модули противоположных чисел равны. Будем иметь:

$$\begin{aligned} |23 - 7c| &= |7c - 23|; \\ -16 &\leq 7c - 23 \leq 16; \\ -16 + 23 &\leq 7c \leq 16 + 23; \\ 7 &\leq 7c \leq 39; \\ 1 &\leq c \leq 5\frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Б. Неравенству $|x| > a$, где $a > 0$, удовлетворяют те и только те значения переменной x , которые на координатной прямой отстоят от начала координат больше чем на a (рис. 79),

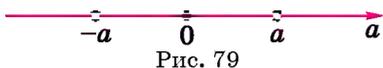


Рис. 79

т. е. такие значения переменной x , которые удовлетворяют неравенству $x < -a$ или неравенству $x > a$. Таким образом,

при $a > 0$ утверждение « $|x| > a$ » равносильно утверждению « $x < -a$ или $x > a$ ».

Неравенству $x < -a$ удовлетворяют все числа промежутка $(-\infty; -a)$, а неравенству $x > a$ — все числа промежутка $(a; +\infty)$. Поэтому решения неравенства $|x| > a$ при $a > 0$ можно

получить, объединив числа промежутков $(-\infty; -a)$ и $(a; +\infty)$.
 Это записывают так:

$$(-\infty; -a) \cup (a; +\infty).$$

Ответ при решении неравенства $|x| > a$ можно записать как в виде:

$$x < -a \text{ или } x > a,$$

так и в виде:

$$(-\infty; -a) \cup (a; +\infty).$$

Понятно, что

при $a > 0$ утверждение « $|x| \geq a$ » равносильно утверждению « $x \leq -a$ или $x \geq a$ ».

Пример 4. Решим неравенство $|2d + 3| \geq 13$.

Имеем:

$$2d + 3 \leq -13 \text{ или } 2d + 3 \geq 13;$$

$$2d \leq -16 \text{ или } 2d \geq 10;$$

$$d \leq -8 \text{ или } d \geq 5 \text{ (рис. 80).}$$

Ответ. $d \leq -8$ или $d \geq 5$.



Рис. 80

Пример 5. Решим неравенство $|7 - 5m| > 13$.

Имеем:

$$5m - 7 < -13 \text{ или } 5m - 7 > 13;$$

$$5m < -6 \text{ или } 5m > 20;$$

$$m < -1,2 \text{ или } m > 4 \text{ (рис. 81).}$$

Ответ. $(-\infty; -1,2) \cup (4; +\infty)$.



Рис. 81

В. Пример 6. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} |3n - 4| \geq 16, \\ |2n + 9| < 27. \end{cases}$$

Последовательно получаем:

$$\begin{cases} 3n - 4 \leq -16 \text{ или } 3n - 4 \geq 16, \\ -27 < 2n + 9 < 27; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3n \leq -12 \text{ или } 3n \geq 20, \\ -36 < 2n < 18; \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \leq -4 \text{ или } n \geq 6\frac{2}{3}, \\ -18 < n < 9. \end{cases}$$

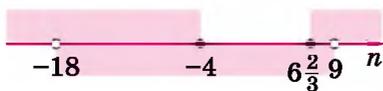


Рис. 82

На рисунке 82 решения первого неравенства системы показаны серой заливкой над координатной прямой, решения второго — синей заливкой под

координатной прямой. Решениями системы являются числа, удовлетворяющие обоим неравенствам, т. е. те числа, которые на координатной прямой отмечены двумя заливками.

Таковыми являются числа промежутков $(-18; -4]$ и $[6\frac{2}{3}; 9)$.

Ответ. $(-18; -4] \cup [6\frac{2}{3}; 9)$.

Пример 7. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} |3k + 4| \leq 1, \\ 2k + 5 > 3. \end{cases}$$

Последовательно получаем:

$$\begin{cases} -1 \leq 3k + 4 \leq 1, \\ 2k + 5 < -3 \text{ или } 2k + 5 > 3; \end{cases} \quad \begin{cases} -5 \leq 3k \leq -3, \\ 2k < -8 \text{ или } 2k > -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1\frac{2}{3} \leq k \leq -1, \\ k < -4 \text{ или } k > -1. \end{cases}$$

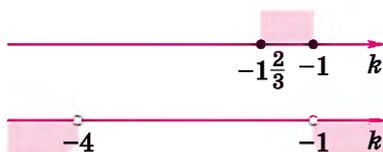


Рис. 83

Показав на рисунке 83 решения первого и второго неравенств, замечаем, что нет таких значений k , которые удовлетворяли бы обоим неравенствам одновременно.

Ответ. Система не имеет решений.

- ❓ 1. Что называют модулем числа? Как обозначают модуль числа?
 2. Чему равен модуль положительного числа; отрицательного числа; числа 0?
 3. Какому неравенству равносильно неравенство $|x| < a$; $|x| \leq a$ ($a > 0$)?
 4. Какому утверждению равносильно неравенство $|x| > a$; $|x| \geq a$ ($a > 0$)?

205. Изобразите на координатной прямой множество решений уравнения:

- а) $|a| = 2$; б) $|b| = 4$; в) $|c| = \frac{4}{7}$; г) $|d| = 1, 2$.

206. Решите уравнение:

- а) $|-v| = 1,2$; г) $|4 - 5t| = 6$; ж) $|3q - 4| = 20$;
 б) $|1 - u| = 23$; д) $|3 - s| = -9$; з) $|13p + 17| = 6$;
 в) $|7 - t| = 7$; е) $|3 - 4r| = 0$; и) $|0,3q - 13| = 2$.

207. Изобразите на координатной прямой множество решений неравенства:

- а) $|a| > 2$; б) $|b| \geq 4$; в) $|c| < \frac{4}{7}$; г) $|d| \leq 1,2$.

208. Пусть $a > 0$. Определите, при каких значениях переменной истинно неравенство:

- а) $|x| < a$; б) $|y| \leq a$; в) $|t| > a$; г) $|w| \geq a$.

209. Пусть $a < 0$. Определите, при каких значениях переменной истинно неравенство:

- а) $|m| < a$; б) $|n| \leq a$; в) $|p| > a$; г) $|q| \geq a$.

210. Запишите двойным неравенством неравенство с модулем:

- а) $|k| < 3$; б) $|l| \leq 12$; в) $|m| < \frac{14}{17}$; г) $|n| \leq 3,1$.

211. Запишите неравенством с модулем двойное неравенство:

- а) $-4 < p < 4$; в) $-\frac{4}{9} < r < \frac{4}{9}$;
 б) $-7 \leq q \leq 7$; г) $7,4 \geq s \geq -7,4$.

212. Неравенством с модулем и, если возможно, двойным неравенством запишите множество чисел, изображенное на координатной прямой на рисунке:

- а) 84; б) 85; в) 86; г) 87.



Рис. 84



Рис. 85



Рис. 86



Рис. 87

213. На координатной прямой изобразите множество чисел, удовлетворяющих условию:

- а) $a < -3$; д) $k \leq 3$ или $k \geq 7$; и) $p \leq 7$ и $p \geq 3$;
 б) $b < 0$; е) $l < -1$ или $l \geq 0$; к) $q < 0$ и $q \geq -1$;
 в) $c \leq 3$; ж) $m \leq -10$ или $m > -1$; л) $u \leq -1$ и $u > -10$;
 г) $d \geq 3$; з) $n < -2$ или $n > 1$; м) $v < 1$ и $v > -2$.

214. На координатной прямой изобразите множество чисел, удовлетворяющих условию:

- а) $x < -1$ или $0 < x < 1$; д) $4 < v < 9$ или $v \geq 13$;
 б) $y \leq 2$ или $4 < y \leq 9$; е) $-6 < w < -3$ или $0 \leq w \leq 7$;
 в) $z < 0$ или $4 \leq z \leq 5$; ж) $2 < t \leq 3$ или $4 \leq t < 5$;
 г) $-3 \leq u < 2$ или $u \geq 3$; з) $-2 \leq s < -1$ или $0 \leq s \leq 1$.

215. Решите неравенство:

- а) $|1 + k| \leq 2,3$; д) $|p + 2| > 1\frac{2}{7}$; и) $|2t - 1| < 1\frac{1}{6}$;
 б) $|l - 17| \geq 23$; е) $|q - 3| < 2\frac{8}{11}$; к) $|3u + 2| < 4\frac{8}{7}$;
 в) $|m - 2,5| < 3,5$; ж) $|r + 7| \leq 3\frac{4}{13}$; л) $|4v - 3| \leq 1\frac{4}{13}$;
 г) $|n + 3,9| > 1,1$; з) $|s - 7| \geq 1\frac{5}{14}$; м) $|5w - 4| \geq 5\frac{5}{14}$.

216. Решите неравенство:

- а) $0 < |t| < 2$; в) $2 \leq |2p| < 8$; д) $2 < |2n - 3| \leq 5$;
 б) $2 \leq |s| < 5$; г) $3 < |3u| \leq 12$; е) $0 \leq |3 - 5m| \leq 2$.

217. Докажите, что $|x - a|$ является расстоянием на координатной прямой между точками с координатами x и a .

218. Запишите характеристическое свойство чисел множества, изображенного на рисунке:

- а) 88; в) 90; д) 92; ж) 94;
 б) 89; г) 91; е) 93; з) 95.



Рис. 88



Рис. 89



Рис. 90

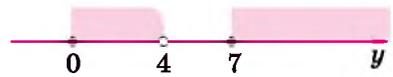


Рис. 91



Рис. 92



Рис. 93



Рис. 94



Рис. 95

219. Решите неравенство:

- а) $|2r - 3| > 5$; в) $|3t - 1| \leq 4$; д) $|0,3 - 1,3v| < 2,3$;
 б) $|1 - 3s| \leq 1$; г) $|3 - 2u| \geq 3$; е) $|1,2 - 0,8w| \geq 2,8$.

220. Найдите целые решения неравенства:

- а) $|5k - 2| \leq 13$; в) $|4m + 3| \leq 9$; д) $|\frac{1}{2}p + 2| \leq 4$;
 б) $|5 - 3l| < 9$; г) $|3 - 4n| < 3$; е) $|3 + 4q| \leq 5\frac{8}{9}$.

221. Определите, при каких значениях переменной истинно равенство:

- а) $|a + 2| = a + 2$; в) $|c - 3| = c - 3$;
 б) $|b + 2| = -b - 2$; г) $|d - 3| = 3 - d$.

222. Решите уравнение:

- а) $|k - 1| = |k - 2|$; г) $|x - 5| = |x - 9|$;
 б) $|l + 2| = |l - 3|$; д) $|2y + 3| = |y - 5|$;
 в) $|m + 3| = |m + 8|$; е) $|3z - 2| = |4z - 10|$.

223. Решите уравнение:

- а) $||m - 1| + 4| = 5$; в) $||p + 9| - 4| = 4$;
 б) $||a + 5| - 3| = 9$; г) $|3 + |c - 6|| = 0$.

224. Решите неравенство:

- а) $||z - 1| + 7| \geq 3$; в) $||u - 6| + 1| > 5$;
 б) $||y + 4| - 4| \leq 4$; г) $|3 - |c - 6|| < 0$.

225. Решите неравенство:

а) $a^{-1} < 0$; б) $(b - 2)^{-1} > 0$; в) $17(4c + 12)^{-1} \geq 0$.

226. Решите неравенство:

а) $\frac{2}{|a|} \leq \frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{|2y|} \leq \frac{5}{6}$; д) $\frac{2}{|5+d|} \geq \frac{6}{7}$;
 б) $\frac{3}{|z|} \leq \frac{2}{9}$; г) $\frac{5}{|3c|} > \frac{2}{9}$; е) $\frac{5}{|w-8|} \leq \frac{7}{12}$.

227. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} |m| \leq 7, \\ 3m - 2 > 1, \\ 4 - m < 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |n + 3| \geq 4, \\ 2n - 5 > -3, \\ 7n > 14; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |3k - 5| \leq 8, \\ |k - 2| > 1, \\ 7 - k > 3. \end{cases}$

228. Вычислите устно:

а) $21 + 7$; ж) $21 - (-7)$; н) $21 : 7$;
 б) $-21 + 7$; з) $-21 - (-7)$; о) $(-21) : 7$;
 в) $21 + (-7)$; и) $21 \cdot 7$; п) $21 : (-7)$;
 г) $-21 + (-7)$; к) $(-21) \cdot 7$; р) $(-21) : (-7)$;
 д) $21 - 7$; л) $21 \cdot (-7)$; с) $|-21| : (-7)$;
 е) $-21 - 7$; м) $(-21) \cdot (-7)$; т) $|-21| : |-7|$.

229. Назовите слагаемые алгебраической суммы:

а) $-7 + a$; в) $p + 9 - q$; д) $-5m + 3n - 11k$;
 б) $x - y$; г) $3b - 2c + d$; е) $-4 - 3r - 2s - 6t$.

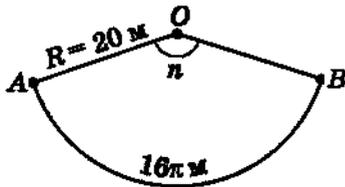


Рис. 96

230. Длина дуги AB сектора AOB равна 16π м, а его радиус R равен 20 м (рис. 96). Найдите величину n угла сектора.

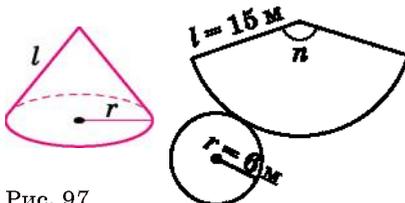


Рис. 97

231. Радиус r основания конуса равен 6 м, а его образующая l равна 15 м (рис. 97). Найдите величину n угла сектора развертки боковой поверхности конуса.

232. Радиус r основания конуса равен 4 м, а его образующая l принадлежит проме-

жутку [8 м; 18 м] (рис. 98). Запишите двойными неравенствами и неравенствами с модулем возможные значения величины n угла сектора развертки боковой поверхности и площади S боковой поверхности конуса.

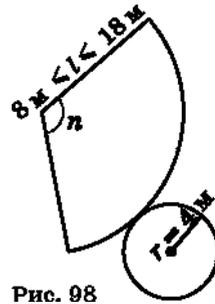


Рис. 98

233. Трое друзей Вадим, Артем и Ольгерд из Лепеля, Новолукомля и Орши соответственно договорились встретиться в 12 ч в Маргойцах (рис. 99). Определите, каким промежуткам принадлежат скорости, с которыми они ехали на велосипедах, учитывая, что Вадим и Ольгерд выехали между 8 ч и 9 ч, а Артем — между 9 ч и 9 ч 30 мин.



Рис. 99

234. На территории нашей страны живут три вида жаб — камышовая, серая, зеленая. Длина тела жабы зеленой такова, что она является средним арифметическим длин тел жаб камышовой и серой, на 1 см больше длины тела жабы камышовой, а длина тела жабы камышовой относится к длине тела жабы серой как 3 : 4. Найдите длины тел этих земноводных.

235. На рисунке 100 показаны соотношения между периодами развития личинок жабы серой, жабы зеленой, жабы камышовой. Составьте задачу и решите ее.

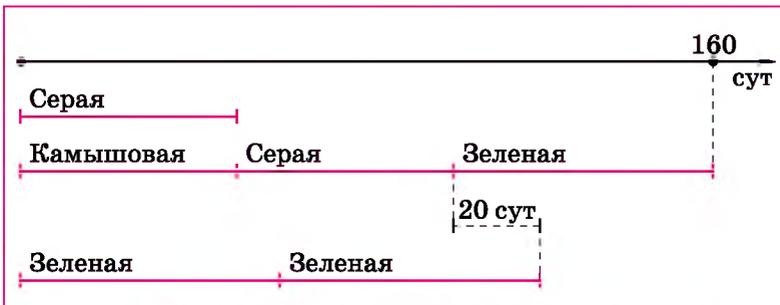


Рис. 100

* * *

236. На плоскости отмечено 4 точки. Докажите, что их можно распределить на две такие группы, которые нельзя отделить одну от другой никакой прямой.

237. Если разделить произведение чисел 2 и 3 на число 4, произведение чисел 3 и 4 на число 5, произведение чисел 4 и 5 на число 6, то в остатке получится число 2. Какую гипотезу можно выдвинуть? Попробуйте обосновать сформулированное утверждение.

238. (Из коллекции профессора Брайена.)

— Как и в прошлый раз, если на синей карточке написано «Получите», то утверждение на ее видимой стороне истинно, а если «Заплатите», то ложно. На белой карточке все наоборот: если написано «Получите», то утверждение на ее видимой стороне ложно, а если «Заплатите», то истинно, — и профессор положил на стол две карточки, показанные на рисунке 101.



Рис. 101

Какую карточку нужно перевернуть, чтобы выиграть 10 фунтов?

II

раздел

Четырехугольники

7. Трапеция и параллелограмм

А. Простая замкнутая ломаная, т. е. замкнутая ломаная без самопересечений, разделяет плоскость на две области — внешнюю и внутреннюю (рис. 102). Внутренняя область вместе с ломаной называется **многоугольником**. На рисунке 102 синим цветом показан многоугольник $ABCDEFG$.

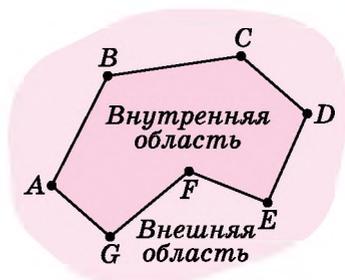


Рис. 102

Если количество сторон равно четырем, то многоугольник называют **четырёхугольником**. На рисунках 103 и 104 показаны четырёхугольники $MNOP$ и $PQRS$.

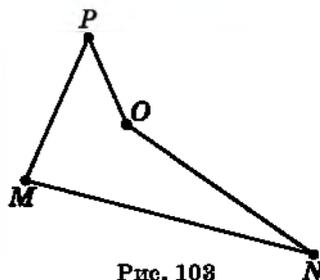


Рис. 103

Каждый угол четырёхугольника на рисунке 104 меньше 180° , поэтому четырёхугольник $PQRS$ **выпуклый**. Четырёхугольник $MNOP$ на рисунке 103 **невыпуклый**, поскольку его угол PON больше 180° .

Четырёхугольник диагональю можно разбить на два треугольника (рис. 105). Поэтому сумма внутренних углов

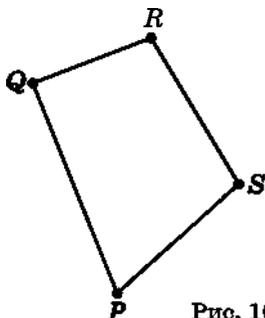


Рис. 104

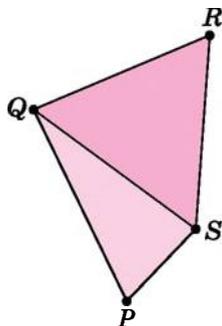


Рис. 105

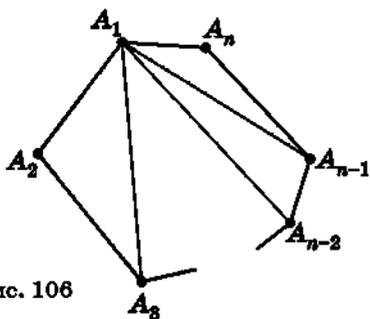


Рис. 106

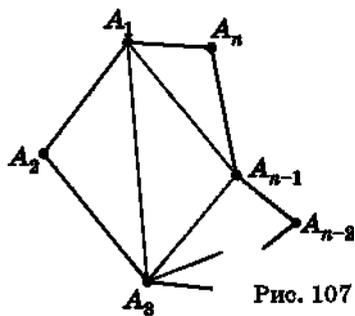


Рис. 107

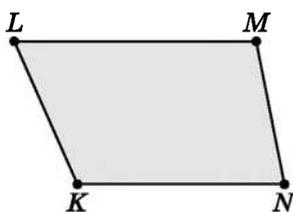


Рис. 108

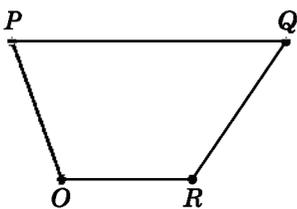


Рис. 109

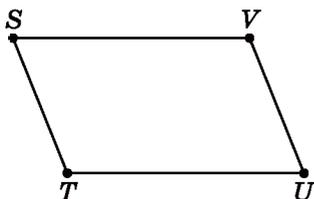


Рис. 110

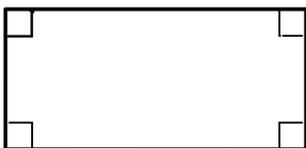


Рис. 111

четырёхугольника равна 360° . Выпуклый n -угольник диагоналями, проведенными из одной вершины, разбивается на $n - 2$ треугольника (рис. 106). Поэтому

сумма внутренних углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$.

Это утверждение остается верным и для невыпуклых n -угольников (рис. 107), хотя доказать его не просто.

Б. Четырёхугольник может иметь параллельные стороны. **Трапецией** называют четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны. Четырёхугольник, у которого есть две пары параллельных сторон, называется **параллелограммом**.

У четырёхугольника $KLMN$ на рисунке 108 параллельными являются только стороны LM и KN , у четырёхугольника $OPQR$ на рисунке 109 — только стороны PQ и OR . Поэтому эти четырёхугольники — трапеции. У четырёхугольника $STUV$ на рисунке 110 параллельными являются стороны ST и UV , а также стороны SV и TU . Поэтому этот четырёхугольник — параллелограмм. Четырёхугольник на рисунке 111 также параллелограмм.

Параллельные стороны трапеции называются **основаниями трапеции**, а две другие — **боковыми сторонами**.

На рисунке 108 стороны LM и KN — основания трапеции $KLMN$, а отрезки LK и MN — ее боковые стороны.

Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется **равнобедренной трапецией**. На рисунке 112 показана равнобедренная трапеция $RSTU$.

Трапеция, у которой есть прямой угол, называется **прямоугольной трапецией**. На рисунке 113 показана прямоугольная трапеция $OPQR$.

Трапеция и параллелограмм имеют ряд общих свойств, потому что у трапеции и у параллелограмма имеются параллельные стороны.

Теорема 1. Сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, равна 180° .

Доказательство. Пусть $ACEG$ — трапеция с основаниями AC и GE (рис. 114). Тогда прямые AC и GE параллельны, а углы A и G — внутренние односторонние углы при параллельных прямых AC и GE , пересеченных прямой AG . По свойству параллельных прямых сумма этих углов равна 180° .

Теорема 2. Если в четырехугольнике сумма углов, прилежащих к какой-либо стороне, равна 180° , то такой четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

Доказательство. Пусть в четырехугольнике $OPQR$ сумма углов O и P , прилежащих к стороне OP , равна 180° (рис. 115). Эти углы являются внутренними односторонними при прямых OR и PQ , пересеченных прямой OP . Используя соответствующий признак параллельных прямых, утверждаем, что стороны OR и PQ параллельны. Если при этом стороны OP и QR непараллельны,

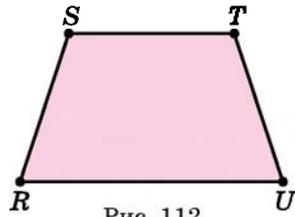


Рис. 112

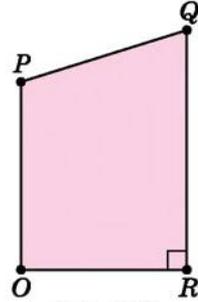


Рис. 113

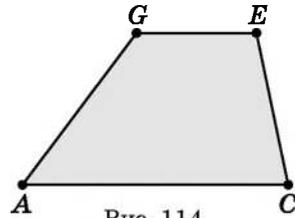


Рис. 114

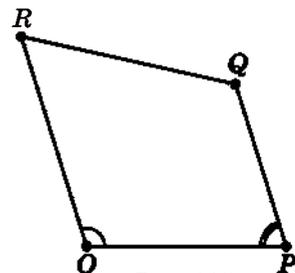


Рис. 115

то четырехугольник $OPQR$ является трапецией, а если параллельны, то — параллелограммом.

В. Теорема 3. В параллелограмме:

- а) *противоположные углы равны;*
- б) *противоположные стороны равны;*
- в) *диагонали точкой пересечения делятся пополам.*

Доказательство. Пусть четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (рис. 116).

а) По определению параллелограмма стороны AB и DC , а также BC и AD параллельны. Параллельность прямых AB и DC , пересеченных прямой BD , влечет за собой равенство углов ABD и CDB , так как это накрест лежащие углы. Аналогично, параллельность прямых BC и AD , пересеченных прямой BD , влечет за собой равенство углов ADB и CBD . Поэтому углы ABC и CDA равны как суммы равных углов.

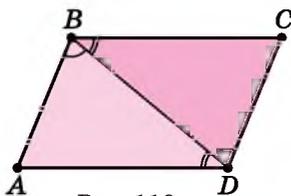


Рис. 116

Треугольники BAD и DCB равны, так как у них сторона BD общая, а углы ABD и CDB , а также углы ADB и CBD попарно равны. Значит, углы A и C равны друг другу.

б) У треугольников BAD и DCB сторона BD общая, а углы ABD и CDB , а также углы ADB и CBD равны друг другу. Поэтому эти треугольники равны. Значит, отрезки AB и DC , а также BC и AD равны друг другу как соответственные стороны равных треугольников.

в) Пусть диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке Q (рис. 117). Тогда по доказанному отрезки BC и AD равны. Углы ADB и CBD равны как накрест лежащие углы при параллельных BC и AD , пересеченных прямой BD , а углы CAD и ACB равны как накрест лежащие при тех же параллельных, но пересеченных прямой AC . Значит, тре-

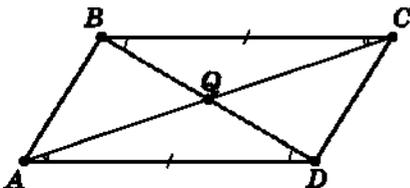


Рис. 117

угольники BQC и AQD равны по стороне и прилежащим к ней углам. Из равенства этих треугольников делаем вывод о равенстве их соответственных сторон BQ и QD , а также AQ и QC .

Г. Теорема 4. *Четырехугольник является параллелограммом, если его:*

- а) противоположные углы попарно равны;*
- б) противоположные стороны попарно равны;*
- в) диагонали точкой пересечения делятся пополам;*
- г) две противоположные стороны параллельны и равны.*

Доказательство. а) Пусть в четырехугольнике $KLMN$ углы K и M равны друг другу и равны α , пусть также равны друг другу и равны β углы L и N (рис. 118). Учитывая, что сумма углов четырехугольника равна 360° , получаем, что $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$, или $\alpha + \beta = 180^\circ$.

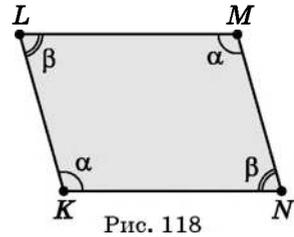


Рис. 118

Учитывая, что углы K и L , равные соответственно α и β , являются внутренними односторонними углами при прямых KN и LM , пересеченных прямой KL , заключаем, что стороны KN и LM параллельны. Так же по углам K и N заключаем, что стороны KL и NM параллельны. Теперь по определению параллелограмма утверждаем, что четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм.

б) Пусть в четырехугольнике $CDEF$ стороны CD и FE , а также CF и DE попарно равны (рис. 119). Проведем одну из диагоналей четырехугольника, например CE . Треугольники CDE и EFC равны по трем сторонам. Поэтому углы DEC и FCE равны. Поскольку эти углы являются внутренними накрест лежащими при прямых DE и CF , пересеченных прямой CE ,

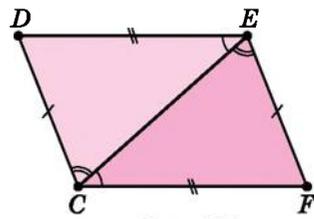


Рис. 119

то стороны DE и CF параллельны. Так же из равенства углов DCE и FEC получаем, что стороны CD и FE параллельны. Теперь по определению параллелограмма утверждаем, что четырехугольник $CDEF$ — параллелограмм.

в) Пусть точка B пересечения диагоналей IL и KM четырехугольника $IKLM$ делит эти диагонали пополам: $IB = BL$ и $KB = BM$ (рис. 120). Тогда треугольники KBL и MBI равны по двум сторонам и углу между ними. Это позволяет

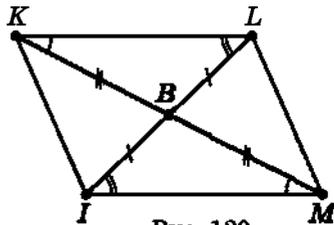


Рис. 120

утверждать, что углы IMB и LKB равны, а значит, стороны IM и KL параллельны. Аналогично, из равенства треугольников KBI и MBL делаем вывод о параллельности сторон IK и LM . Теперь по определению параллелограмма можем утверждать, что четырехугольник $IKLM$ — параллелограмм.

г) Пусть в четырехугольнике $OPQR$ противоположные стороны OP и RQ параллельны и равны (рис. 121). Проведем диагональ OQ . Полученные углы POQ и RQO равны,

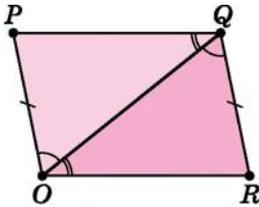


Рис. 121

так как они являются внутренними накрест лежащими при параллельных прямых OP и RQ , пересеченных прямой OQ . Поэтому треугольники OPQ и RQO равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, их соответствующие углы PQO и ROQ равны. А поскольку они являются внутренними накрест лежащими углами при прямых PQ и OR , пересеченных прямой OQ , то стороны PQ и OR параллельны. Учитывая параллельность сторон OP и RQ , по определению параллелограмма утверждаем, что четырехугольник $OPQR$ — параллелограмм.



1. Какую фигуру называют многоугольником?
2. Какой многоугольник называют четырехугольником?
3. Чему равна сумма внутренних углов многоугольника; четырехугольника?
4. Какой четырехугольник называют трапецией; параллелограммом?
5. Какие стороны трапеции называют основаниями; боковыми сторонами?
6. Сформулируйте свойство углов трапеции.
7. Сформулируйте свойства параллелограмма.
8. Сформулируйте признаки параллелограмма.
9. Какая трапеция называется равнобедренной; прямоугольной?

239. Из многоугольников на рисунке 122 укажите те, которые являются:

а) трапециями; б) параллелограммами.

240. Найдите неизвестные углы трапеции $LMNO$ и начертите эту трапецию, учитывая, что:

а) углы L и N равны 42° и 118° соответственно;

б) два угла равны 40° и 110° , а меньшее основание равно 4 см.

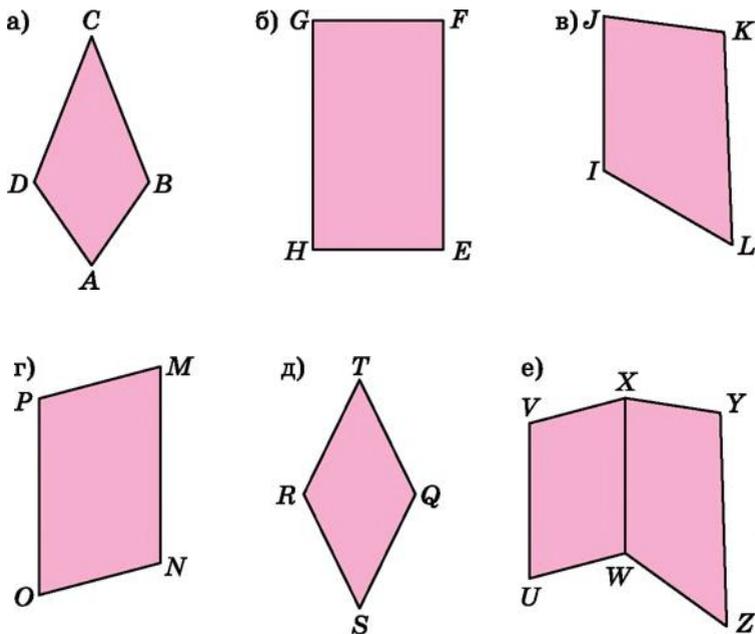


Рис. 122

241. Найдите углы трапеции $PQRS$ с основанием PS , учитывая, что:

- а) угол P равен 50° , а угол S на 10° меньше его;
- б) угол P равен 56° , а угол S в четыре раза меньше его;
- в) угол P на 20° меньше угла Q и на 20° больше угла S ;
- г) угол P на 20° меньше угла Q и на 30° меньше угла S .

242. Докажите, что биссектрисы углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, перпендикулярны.

243. Найдите углы и установите вид четырехугольника $EFGH$, учитывая, что:

- а) его углы E, F, G, H относятся как $3 : 7 : 4 : 6$;
- б) пятая доля угла H равна седьмой доле угла E , угол E на 30° больше угла F и вместе с углом G составляет 210° ;
- в) его углы E, F, G, H относятся как $16 : 12 : 7 : 10$.

244. Докажите, что:

- а) углы при основании равнобедренной трапеции равны друг другу;

- б) если углы при основании равнобедренной трапеции равны друг другу, то эта трапеция равнобедренная;
 в) если углы при основании трапеции равны друг другу, то серединный перпендикуляр к этому основанию является осью симметрии трапеции.

245. PS — большее основание трапеции $PQRS$. Определите, могут ли ее углы P, Q, R, S относиться как:

- а) $2 : 7 : 4 : 5$; в) $3 : 3 : 1 : 5$;
 б) $3 : 5 : 6 : 3$; г) $5 : 7 : 3 : 9$.

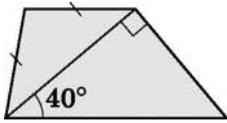


Рис. 123

246. Одна из диагоналей трапеции перпендикулярна боковой стороне и образует с большим основанием угол в 40° , а другая боковая сторона равна меньшему основанию (рис. 123). Найдите углы трапеции.

247. Биссектриса угла P параллелограмма $PQRS$ пересекает сторону QR в точке B . Найдите длины отрезков QB и RB , учитывая, что стороны PQ и PS соответственно равны 10 м и 14 м.

248. Докажите, что в равнобедренной трапеции диагонали равны.

249. Докажите, что трапеция является равнобедренной, если в ней равны диагонали.

250. Докажите, что из одинаковых плиток в форме трапеции можно сделать паркет, целиком покрывающий плоскость.

251. Найдите углы параллелограмма, учитывая, что:

- а) один из них на 40° меньше другого;
 б) один из них составляет 20 % другого;
 в) один из них составляет 140 % другого;
 г) один из них в 3,5 раза больше другого.

252. Точка A пересечения биссектрисы угла L параллелограмма $LMNO$ со стороной MN разделяет эту сторону на отрезки MA и AN , равные 16 дм и 10 дм соответственно. Найдите периметр параллелограмма.

253. Биссектриса SC параллелограмма $RSTV$ разделяет сторону RV на равные отрезки RC и VC . Найдите периметр параллелограмма, учитывая, что сторона TV равна 40 см.

254. Биссектрисы углов параллелограмма, прилежащих к большей стороне, разделяют противоположащую сторону на три части. Найдите эти части, учитывая, что стороны параллелограмма равны 5 дм и 12 дм.

255. Перпендикуляр BK , опущенный из вершины B параллелограмма $ABCD$, разделяет сторону AD на отрезки AK и DK , соответственно равные 6 см и 11 см. Найдите стороны и углы параллелограмма, учитывая, что угол A равен 60° .

256. Из вершин K и M параллелограмма $KLMN$ на прямую, содержащую диагональ LN , опущены перпендикуляры KK_1 и MM_1 (рис. 124 и 125). Докажите, что четырехугольник KK_1MM_1 — параллелограмм.

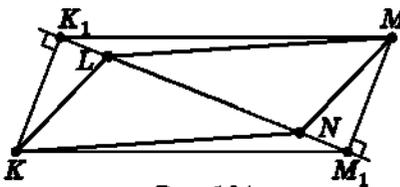


Рис. 124

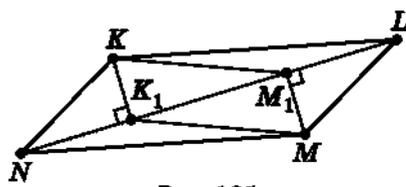


Рис. 125

257. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если:

- углы, прилежащие к стороне AB , как и углы, прилежащие к стороне BC , вместе составляют 180° ;
- его противоположные углы A и C равны, а углы A и B вместе составляют 180° .

258. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелограмма $BCDE$, отсекает на его сторонах CD и BE отрезки CK и BL , соответственно равные 1,3 дм и 1,7 дм. Найдите стороны параллелограмма, учитывая, что его периметр равен 10 дм.

259. Постройте параллелограмм, у которого:

- две стороны равны 3 см и 5 см, а угол между ними составляет 40° ;
- две стороны и диагональ соответственно равны 30 мм, 50 мм и 60 мм;
- сторона, прилежащий к ней угол и диагональ соответственно равны 4 см, 35° и 5 см.

260. Постройте параллелограмм, у которого стороны равны 5 см и 8 см, а высота, проведенная к одной из этих сторон, делит ее пополам.

261. Решите неравенство:

а) $\frac{3a+4}{5} < \frac{7a-8}{6} + \frac{1+7a}{15}$; б) $\frac{5c-1}{2} + \frac{2c-2}{7} > \frac{13c+9}{6}$.

262. Решите систему неравенств:

а)
$$\begin{cases} \frac{2a+1}{5} - \frac{1-a}{15} \leq \frac{a}{3} + \frac{a}{5}, \\ \frac{2a}{3} + \frac{a-5}{12} < \frac{3a}{2} + \frac{a+5}{6}; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} \frac{5b-1}{6} - \frac{2b-1}{2} > 0, \\ 1 - \frac{b+4}{3} < 0. \end{cases}$$

263. Упростите выражение:

а) $\frac{x^4 - (x-1)^2}{(x^2+1)^2 - x^2} + \frac{x^2 - (x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2 - 1} + \frac{x^2(x-1)^2 - 1}{x^4 - (x+1)^2}$;

б) $\frac{x+y}{mx+ny} + \frac{x-y}{mx-ny} + \frac{2(mx^2+ny^2)}{m^2x^2+n^2y^2} - \frac{4(m^3x^4-n^3y^4)}{m^4x^4-n^4y^4}$.

264. Отметьте в тетради центр симметрии O и отрезок PQ . Постройте фигуру, симметричную отрезку PQ относительно центра O , если центр O :

- а) не принадлежит отрезку PQ ;
 б) принадлежит отрезку PQ .

265. Зависимость сопротивления R электрической цепи, состоящей из трех параллельно соединенных резисторов R_1 ,

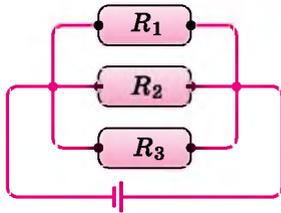


Рис. 126

R_2 , R_3 (рис. 126), задается формулой $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. Выразите из этой формулы переменную R_3 через переменные R , R_1 , R_2 . Найдите значение переменной R_3 , если:

- а) $R = 20$ Ом, $R_1 = 40$ Ом, $R_2 = 60$ Ом;
 б) $R = 75$ Ом, $R_1 = 125$ Ом, $R_2 = 225$ Ом.

* * *

266. Найдите наименьшее натуральное число, третья степень которого кратна числу 588.

267. Сумма пяти различных целых чисел равна 19. Какое наибольшее значение при этом может принимать сумма двух наименьших из них?

Правообладатель Народная асвета

268. (Из коллекции профессора Брайена.) На этот раз профессор Брайен положил на стол карточки, показанные на рисунке 127, и был очень доволен.

Результат не зависит от того, какую карточку перевернуть

На соседней карточке написано «Получите»

Рис. 127

— А что сегодня означает цвет карточек?

— Ничего нового по сравнению с прошлой неделей. Если на синей карточке написано «Получите», то утверждение на ее видимой стороне истинно, а если «Заплатите», то ложно. На белой карточке все наоборот: если написано «Получите», то утверждение на ее видимой стороне ложно, а если «Заплатите», то истинно.

Какую карточку нужно перевернуть, чтобы выиграть 10 фунтов?

8. Средние линии треугольника и трапеции

А. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется **средней линией** треугольника.

На рисунке 128 каждый из отрезков KL , LM , MK является средней линией треугольника ABC .

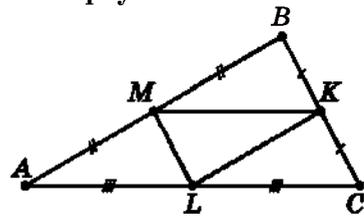


Рис. 128

Теорема 5. Средняя линия треугольника параллельна соответствующей стороне треугольника и равна ее половине.

Доказательство. Пусть PQ — средняя линия треугольника DEF (рис. 129), т. е. $DP = PE$ и $FQ = QE$. На луче PQ за точку Q отложим отрезок QR , равный отрезку PQ , и точку R соединим с точкой F . Треугольники PQE и RQF равны по двум сторонам и углу между ними. Зна-

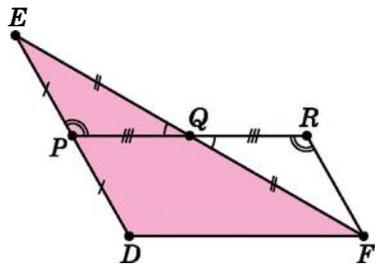


Рис. 129

чит, отрезок RF равен отрезкам EP и DP , а угол EPQ равен углу FRQ . Учитывая, что эти углы являются внутренними накрест лежащими углами при прямых PE и FR , пересеченных прямой PR , получаем, что эти прямые параллельны. По признаку параллелограмма, доказанному в теореме 4 з, утверждаем, что четырехугольник $DPRF$ — параллелограмм.

Из определения параллелограмма получаем, что средняя линия PQ параллельна стороне DF треугольника DEF .

По свойству параллелограмма, доказанному в теореме 3 б, получаем, что $DF = PR$. Но $PR = 2PQ$. Значит, $DF = 2PQ$, или окончательно, $PQ = \frac{1}{2}DF$.

Б. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется **средней линией трапеции**.

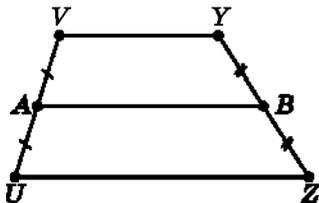


Рис. 130

На рисунке 130 отрезок AB — средняя линия трапеции $UVYZ$, так как $UA = AV$ и $ZB = BY$.

Теорема 6. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство. Пусть DB — средняя линия трапеции $KLMN$

(рис. 131). Проведем прямую LB , пусть она пересекает прямую KN в точке C . Треугольники LBM и CBN равны, так как у них углы LBM и CBN равны как вертикальные, углы LMB и CNB равны как накрест лежащие при параллельных LM и KN , пересеченных прямой MN , стороны NB и MB равны по условию. Поэтому отрезки LB и BC равны. Значит, DB есть средняя линия треугольника KLC , а отрезок DB параллелен отрезку KC и, значит, основанию KN трапеции. А поскольку основания KN и LM параллельны, то средняя линия DB параллельна и основанию LM . Мы доказали, что средняя линия трапеции параллельна обоим основаниям трапеции. Докажем теперь, что она равна полусумме этих оснований.

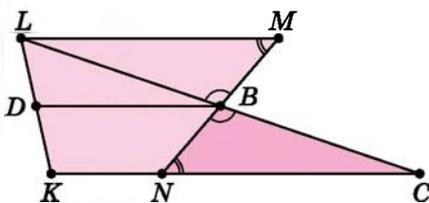


Рис. 131

В соответствии с теоремой о средней линии треугольника получаем:

$$DB = \frac{1}{2}KC.$$

Но $KC = KN + NC$, а $NC = LM$, поэтому

$$DB = \frac{1}{2}(KN + NC) = \frac{1}{2}(KN + LM) = \frac{KN + LM}{2}.$$

Следствие. Если прямая проходит через середину стороны треугольника или трапеции и параллельна основанию, то она содержит среднюю линию.

Действительно, если MN — средняя линия, то прямые l и MN проходят через середину M стороны AB треугольника ABC (рис. 132) или трапеции $ABCD$ (рис. 133). Они обе параллельны основанию. А поскольку через точку вне прямой можно провести только одну прямую, параллельную данной, то прямые l и MN совпадают.

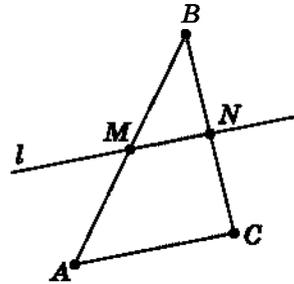


Рис. 132

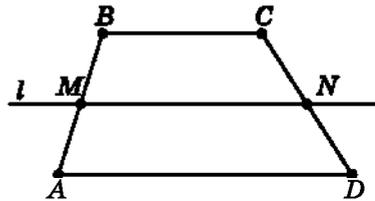


Рис. 133

Задача. Докажем, что координаты середины отрезка равны полусуммам соответствующих координат его концов.

Найдем координаты $(x_C; y_C)$ середины C отрезка с концами в точках $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$.

Пусть для определенности $x_1 < x_2$ и $y_1 > y_2$. Проведем через точки A, B и C параллельно координатным осям прямые (рис. 134). Тогда по доказанному следствию отрезки CM и CN — средние линии треугольника KAB . Значит,

$$CN = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2}|x_1 - x_2| = \frac{1}{2}(x_2 - x_1),$$

$$CM = \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}|y_1 - y_2| = \frac{1}{2}(y_1 - y_2).$$

Тогда

$$x_C = x_1 + KM = x_1 + CN = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),$$

$$y_C = y_2 + KN = y_2 + CM = y_2 + \frac{1}{2}(y_1 - y_2) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

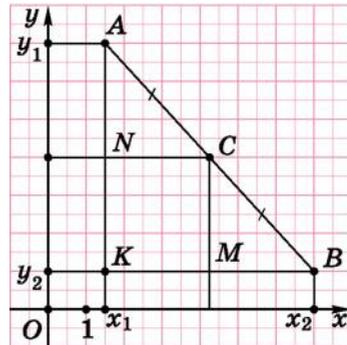


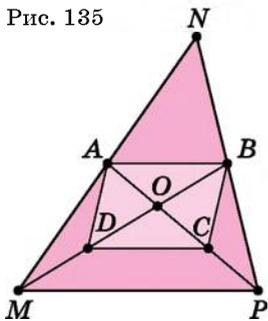
Рис. 134

Подобные рассуждения проводятся и тогда, когда $x_1 = x_2$ или $x_1 > x_2$ и $y_1 = y_2$ или $y_1 < y_2$.

В. Теорема 7. *Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, и каждая из них делится точкой пересечения в отношении 2 : 1, если считать от вершины.*

Доказательство. Пусть медианы MB и PA треугольника MNP пересекаются в точке O (рис. 135).

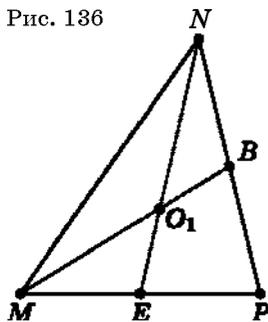
Рис. 135



Найдем середины C и D отрезков OP и OM и рассмотрим четырехугольник $ABCD$. Его стороны AB и DC параллельны и равны как средние линии треугольников MNP и MOP с общей стороной MP . Поэтому четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Поскольку диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то $OD = OB$. Учитывая, что D — середина отрезка OM , получаем $MD = OD = OB$. Значит, $MO : OB = 2 : 1$. Так же $PO : OA = 2 : 1$.

Рис. 136



Остается доказать, что третья медиана NE проходит через точку O . Пусть медианы NE и MB пересекаются в точке O_1 (рис. 136). Тогда по доказанному $MO_1 : O_1B = 2 : 1$. Учитывая, что и $MO : OB = 2 : 1$, заключаем, что точки O_1 и O делят отрезок MB в одном и том же

отношении. А это значит, что точка O_1 совпадает с точкой O . Значит, медиана NE проходит через точку O пересечения медиан MB и PA .

- ❓ 1. Какой отрезок называют средней линией треугольника; трапеции?
 2. Сформулируйте свойство средней линии треугольника; трапеции.
 3. Сформулируйте теорему о точке пересечения медиан треугольника.

269. Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB треугольника ABC , которые равны соответственно 6 см, 10 см, 14 см. Найдите длину отрезка:

- а) A_1B_1 ; б) A_1C_1 ; в) B_1C_1 .

270. Стороны LM , MN , NL треугольника LMN соответственно равны 8 см, 10 см, 14 см. Найдите периметр треугольника $L_1M_1N_1$, где L_1 , M_1 , N_1 — середины сторон MN , NL , LM соответственно.

271. На половине длины стропил, концы которых раздвинуты на 6 м, сделан ригель (рис. 137). Определите длину ригеля.

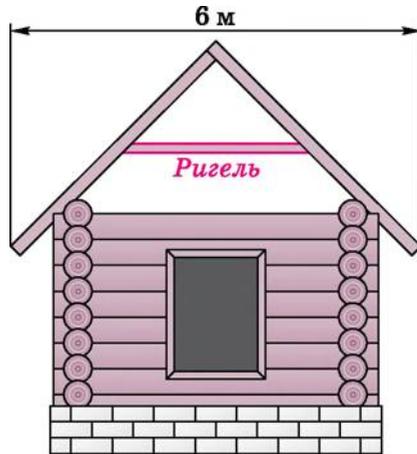


Рис. 137

272. Раствор полевого циркуля (рис. 138) равен 2 м. Найдите длину распорки, прикрепленной к середине ножек циркуля.

273. Докажите, что медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна ее половине.

274. Используя рисунок 139, опишите, как с помощью свойства средней линии треугольника можно определить расстояние между двумя объектами, один из которых недоступен.

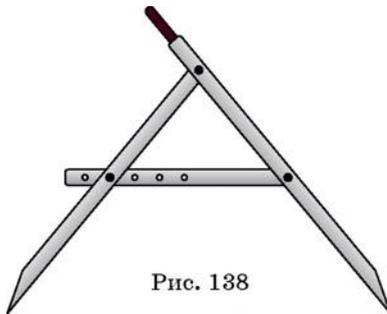


Рис. 138

275. Точки A и B — середины сторон PQ и QR треугольника PQR . Найдите периметр треугольника PQR , если периметр треугольника AQB равен 38 см.

276. Стороны треугольника CDE относятся как $3 : 5 : 7$, а его периметр равен 75 дм. Найдите периметр и стороны треугольника MON , вершины которого являются серединами сторон треугольника CDE .

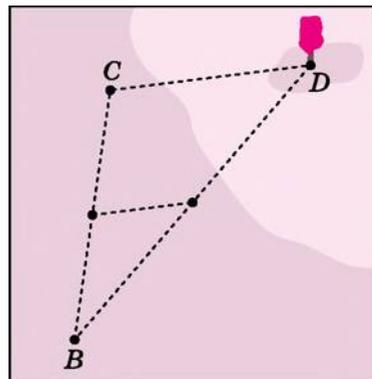


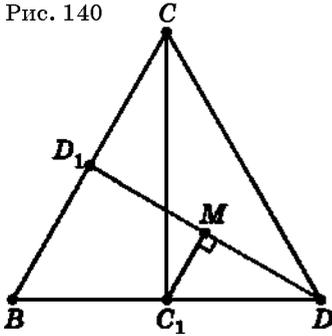
Рис. 139

277. Стороны треугольника IJK относятся как $4:5:7$. Когда соединили середины сторон этого треугольника, то получился треугольник с периметром, равным 480 мм. Найдите периметр и стороны треугольника IJK .

278. Точки A и B выбраны по разные стороны от прямой l и на расстояниях 10 см и 6 см от нее. Определите, на каком расстоянии от прямой l находится середина O отрезка AB .

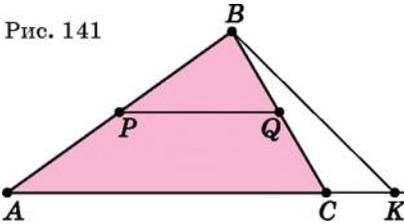
279. Через вершины L, M, N параллельно противоположным сторонам треугольника LMN провели прямые, которые пересекаются в точках D, E, F . Докажите, что точки L, M, N являются серединами сторон треугольника DEF . Найдите стороны треугольника DEF , учитывая, что стороны треугольника LMN равны 6 см, 11 см и 15 см.

Рис. 140



280. Высота CC_1 равностороннего треугольника BCD равна 8 дм (рис. 140). Найдите проекцию отрезка CC_1 (множество оснований перпендикуляров, опущенных из точек CC_1) на другую высоту DD_1 .

Рис. 141



281. Отрезок PQ — средняя линия треугольника ABC (рис. 141). На луче AC выбрана произвольно точка K , которую соединили с вершиной B . Определите, в каком отношении отрезок BK делится прямой PQ .

282. Найдите среднюю линию трапеции, учитывая, что ее основания равны:

- а) 27 мм и 43 мм; б) 2,73 м и 4,39 м; в) 3,8 дм и 26 см.

283. Концы отрезка AB , расположенного с одной стороны от прямой l , отстоят от нее на 47 мм и 79 мм. Определите, на каком расстоянии от прямой l находится середина O отрезка AB .

284. Основания трапеции относятся как $7:4$ и отличаются на 39 мм. Найдите среднюю линию этой трапеции.

285. Найдите основы трапеции, учитывая, что:

а) диагональ трапеции разделяет среднюю линию на отрезки, один из которых на 30 мм длиннее другого, а средняя линия равна 110 мм;

б) диагональ трапеции разделяет среднюю линию на отрезки, которые относятся как $3 : 10$, и один из них на 49 см длиннее другого.

286. Диагонали трапеции разделяют ее среднюю линию на три доли. Определите, во сколько раз одно основание трапеции больше другого.

287. Диагонали трапеции являются биссектрисами ее острых углов. Найдите среднюю линию трапеции, учитывая, что периметр трапеции равен 112 см, а основания относятся как $3 : 5$.

288. Основания прямоугольной трапеции относятся как $4 : 5$, ее средняя линия равна 45 см, а один из углов составляет 135° . Найдите меньшую боковую сторону трапеции.

289. Найдите координаты середин K, L, M, N сторон четырехугольника $ABCD$, середин P и Q диагоналей четырехугольника $KLMN$, учитывая, что:

а) $A(5; -1), B(-3; -5), C(7; 5), D(3; -3)$;

б) $A(-2; -5), B(6; 5), C(4; -3), D(2; 3)$.

Какую гипотезу вы можете выдвинуть? Как ее обосновать?

290. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника, вершины которого находятся в точках:

а) $A(5; -1), B(6; 0), C(-5; 1)$;

б) $A(0; 0), B(-4; 6), C(4; 3)$.

Какую гипотезу вы можете выдвинуть? Как ее обосновать?

291. Докажите, что:

а) каждый отрезок с концами на основаниях трапеции разделяется ее средней линией на равные части;

б) из треугольников, на которые диагонали разделяют равнобедренную трапецию, два треугольника, прилежащие к основаниям, являются равнобедренными;

в) если диагонали трапеции являются биссектрисами ее острых углов, то такая трапеция равнобедренная.

292. Можно ли утверждать, что:

а) если диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, то ее средняя линия равна высоте трапеции;

б) если средняя линия трапеции равна ее высоте, то такая трапеция равнобедренная?

293. Найдите среднюю линию трапеции, диагональ которой:

а) отделяет от трапеции равносторонний треугольник со стороной 8 см, учитывая, что сама трапеция прямоугольная;

б) перпендикулярна ее двум основаниям, учитывая, что большее основание равно 14 см, прилежащий к нему тупой угол составляет 120° , а боковая сторона, лежащая на стороне этого угла, равна 8 см.

294. Высота равностороннего треугольника равна 63 мм. Найдите расстояние от точки пересечения биссектрис треугольника до его стороны.

295. Постройте треугольник:

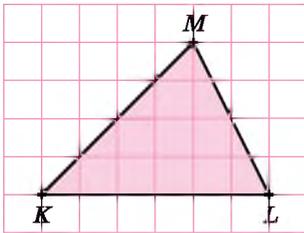


Рис. 142

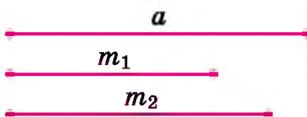


Рис. 143

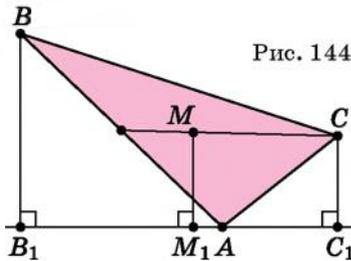


Рис. 144

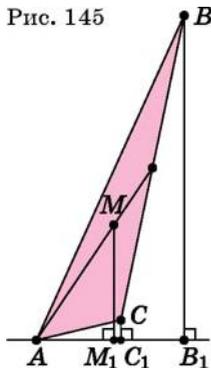


Рис. 145

а) KLN , точка пересечения медиан которого совпадает с вершиной M данного треугольника KLM (рис. 142);

б) RST , учитывая, что его сторона RS и медианы RR_1 и SS_1 соответственно равны отрезкам a , m_1 , m_2 на рисунке 143.

296. Основание равнобедренного треугольника равно 16 см, а высота, проведенная к нему, — 10 см. Найдите медиану, проведенную к боковой стороне.

297. Начертите в тетради отрезок. Разделите его:

- в отношении $1:1$;
- на 3 доли;
- на 4 доли;
- на 6 долей.

298. Проекция AB_1 и AC_1 сторон AB и AC треугольника ABC на прямую, проходящую через вершину A этого треугольника, оказались равными 7 см и 4 см (рис. 144 и 145). Найдите расстояния от проекции M_1 точки M пересечения медиан треугольника до проекций вершин треугольника.

299. Отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других сторон. Докажите, что этот четырехугольник является параллелограммом.

300. Начертите в тетради ось симметрии l и отрезок AB . Постройте фигуру, симметричную отрезку AB относительно оси l , учитывая, что отрезок AB :

- а) не пересекает ось l ; б) пересекает ось l .

301. Решите неравенство:

- а) $|7c| \leq 21$; в) $|b - 5| \geq 9$; д) $|4 + y| < 7$;
 б) $|4a| > 24$; г) $|2 - 3x| < 4$; е) $|2z + 5| \geq 11$.

302. Докажите, что:

- а) произведение двух средних из четырех последовательных натуральных чисел больше произведения двух крайних;
 б) квадрат среднего из трех последовательных натуральных чисел больше произведения двух крайних.

303. Докажите, что:

- а) если $a > 0$ и $b > 0$, то $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$;
 б) если $k > 0$, $l > 0$, $m > 0$, то $\frac{2k}{l+m} + \frac{2l}{k+m} + \frac{2m}{k+l} \geq 3$.

304. Треугольник ограничен боковой стороной трапеции и биссектрисами ее углов, прилежащих к этой стороне. Докажите, что медиана треугольника, проведенная к этой боковой стороне трапеции, параллельна ее основаниям.

305. На территории нашей страны гнездятся четыре вида луней — болотный, полевой, луговой, степной. Длина тела луня болотного на 3 см больше длины тела луня полевого и на 47 см меньше суммарной длины тел луней полевого и степного. Длина тела луня степного на 2 см меньше длины тела луня лугового. Найдите длины тел этих птиц, учитывая, что их суммарная длина составляет 205 см.

306. На рисунке 146 показаны соотношения между массами разных видов луней, гнездящихся на территории нашей страны. Составьте задачу и решите ее. По полученному ответу составьте новую задачу.



* * *

307. Среди сорока монет есть две фальшивые, одна из которых немного легче, другая — немного тяжелее настоящих. Можно ли за четыре взвешивания на чашечных весах определить, какое из утверждений истинно:

- а) две фальшивые монеты весят столько же, сколько и две настоящие;
- б) две фальшивые монеты весят больше, чем две настоящие;
- в) две фальшивые монеты весят меньше, чем две настоящие?

308. Каждая точка прямой имеет один из двух цветов. Докажите, что на этой прямой можно найти три такие точки A , B и C одного цвета, что B является серединой отрезка AC .

309. (Из коллекции профессора Брайена.)

— Испытайте сегодня счастье. — На этот раз профессор положил на стол синюю и белую карточки, показанные на рисунке 147.

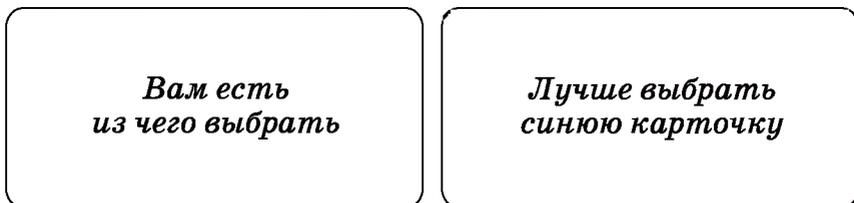


Рис. 147

— Цвета означают то же, что и раньше?

— Да, если на синей карточке написано «Получите», то надпись на ее видимой стороне истинная, а если «Заплатите», то ложная. Для белой карточки все наоборот: если написано «Получите», то надпись на ее видимой стороне ложная, а если «Заплатите», то истинная.

Какую карточку нужно перевернуть, чтобы выиграть 10 фунтов?

9. Прямоугольник, ромб, квадрат

А. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, у которого есть прямой угол A (рис. 148). По свойству углов, прилежащих к одной стороне, получаем, что углы A и B вместе составляют 180° . Значит,

$$\angle B = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

В соответствии со свойством противоположных углов параллелограмма можем записать:

$$\angle C = \angle A = 90^\circ; \angle D = \angle B = 90^\circ.$$

Таким образом, *если один угол параллелограмма прямой, то и три других его угла также прямые.*

Параллелограмм, у которого есть прямой угол, называется **прямоугольником**.

Поскольку прямоугольник является параллелограммом, то у прямоугольника есть все свойства параллелограмма. Но прямоугольник имеет и особые свойства.

Теорема 8. *Диагонали прямоугольника равны.*

Доказательство. Пусть отрезки PR и QS — диагонали прямоугольника $PQRS$ (рис. 149). Треугольники PQR и QPS равны, так как они оба прямоугольные, имеют общий катет PQ , а катеты QR и PS равны как противоположные стороны параллелограмма $PQRS$. Значит, диагонали PR и QS равны как гипотенузы равных прямоугольных треугольников PQR и QPS .

Теорема 9. *Параллелограмм с равными диагоналями является прямоугольником.*

Доказательство. Пусть в параллелограмме $EFGH$ диагонали EG и FH равны (рис. 150). Тогда треугольники EFG и FEH равны по трем сторонам. Значит, равны соответственные углы EFG и FEH этих треугольников. Поскольку



Рис. 148

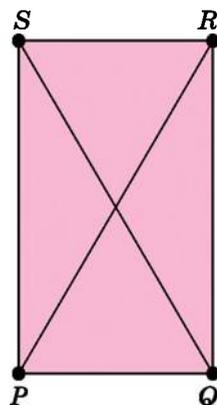


Рис. 149

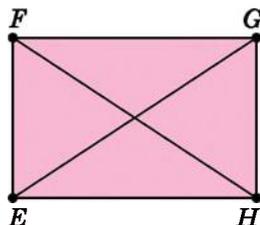


Рис. 150

эти углы являются прилежащими к одной стороне EF параллелограмма, то вместе они составляют 180° . Значит, каждый из них равен 90° . Теперь, применив определение прямоугольника, можем утверждать, что параллелограмм $EFGH$ является прямоугольником.

Б. Рассмотрим параллелограмм $PQRS$, у которого смежные стороны PQ и PS равны (рис. 151). Поскольку стороны QR и PS , а также SR и PQ равны друг другу как противоположные стороны параллелограмма, то получается, что у параллелограмма $PQRS$ все стороны равны.

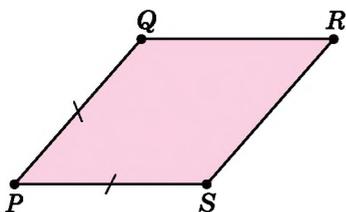


Рис. 151

Параллелограмм, у которого есть пара равных смежных сторон, называется **ромбом**.

По определению ромб является параллелограммом, потому у ромба есть все свойства параллелограмма. Установим особые свойства ромба.

Теорема 10. У ромба диагонали:

а) перпендикулярны;

б) лежат на биссектрисах соответствующих углов.

Доказательство. а) Пусть KM и LN — диагонали ромба $KLMN$, которые пересекаются в точке Q (рис. 152). Поскольку ромб является параллелограммом, то его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Значит, LQ — медиана

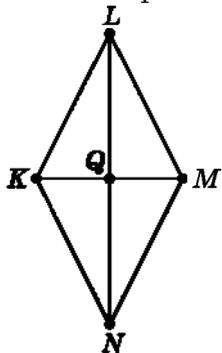


Рис. 152

треугольника KLM . Но треугольник KLM равнобедренный, так как $KL = ML$. Поэтому медиана LQ является и высотой треугольника KLM . Отсюда следует, что отрезки KM и LQ , а значит, и отрезки KM и LN перпендикулярны.

б) Пусть KM и LN — диагонали ромба $KLMN$, пересекающиеся в точке Q (см. рис. 152). Поскольку LQ — медиана равнобедренного треугольника KLM , то LQ , а значит и LN , лежит на биссектрисе угла KLM .

Теорема 11. Параллелограмм является ромбом, если его:

а) диагонали перпендикулярны;

б) диагональ лежит на биссектрисах соответствующих углов.

углов.

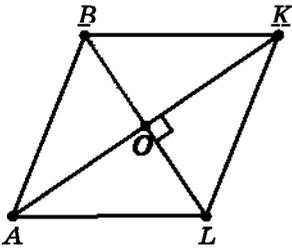


Рис. 153

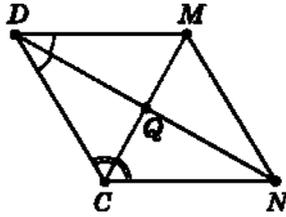


Рис. 154

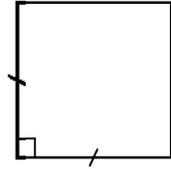


Рис. 155

Доказательство. а) Пусть AK и BL — диагонали параллелограмма $ABKL$, пересекающиеся в точке O под прямым углом (рис. 153). Тогда в треугольнике BKL отрезок KO является медианой и высотой. По соответствующему признаку этот треугольник равнобедренный, т. е. $KB = KL$. Но KB и KL — смежные стороны параллелограмма $ABKL$. Значит, этот параллелограмм является ромбом.

б) Пусть CM и DN — диагонали параллелограмма $CDMN$, которые пересекаются в точке Q , и диагональ DN является биссектрисой угла D (рис. 154). Тогда в треугольнике CDM отрезок DQ — медиана и биссектриса. По соответствующему признаку этот треугольник равнобедренный, т. е. $DC = DM$. Но DC и DM — смежные стороны параллелограмма $CDMN$. Значит, параллелограмм $CDMN$ является ромбом.

В. Квадратом называется прямоугольник, у которого есть пара равных смежных сторон (рис. 155).

Понятно, что у квадрата все стороны равны. Значит, квадрат является и ромбом.

Квадрат можно определить и как ромб, у которого есть прямой угол.

Поскольку квадрат является и прямоугольником, и ромбом, то у квадрата есть все свойства прямоугольника (рис. 156) и все свойства ромба (рис. 157).

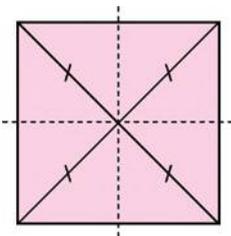


Рис. 156

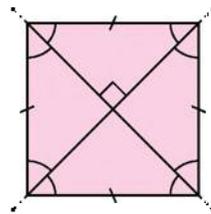


Рис. 157

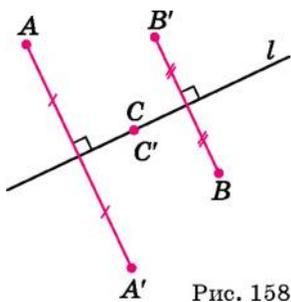


Рис. 158

Напомним, что фигура называется осесимметричной, если для каждой точки этой фигуры осесимметричная ей точка также принадлежит этой фигуре. Осесимметричные точки лежат на одинаковых расстояниях по разные стороны от оси симметрии на одном перпендикуляре к ней. На рисунке 158 точки A и A' , а также B и B' осесимметричны. Если точка C лежит

на оси симметрии l , то симметричная ей точка C' совпадает с точкой C . На рисунках 159, 160, 161 приведены примеры осесимметричных фигур.

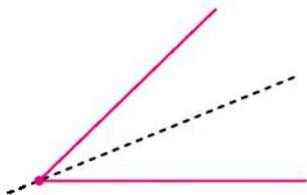


Рис. 159

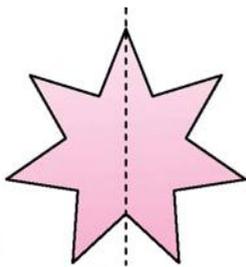


Рис. 160

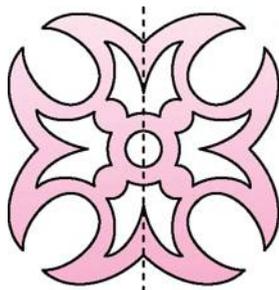


Рис. 161

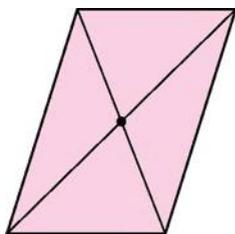


Рис. 162

Параллелограмм — центрально-симметричная фигура, точка пересечения диагоналей является его центром симметрии (рис. 162). Прямоугольник и ромб примечательны тем, что они имеют еще по две оси симметрии. Это серединные перпендикуляры к сторонам прямоугольника (рис. 163) и диагонали ромба

(рис. 164). Квадрат владеет еще большей симметрией: это четырехугольник, имеющий четыре оси симметрии и центр симметрии (рис. 165).

Теперь вы знаете разные виды четырехугольников и основные их свойства и признаки. Соотношения между видами четырехугольников представлены на рисунке 166.

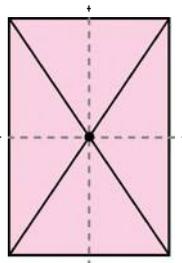


Рис. 163

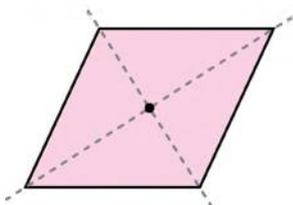


Рис. 164

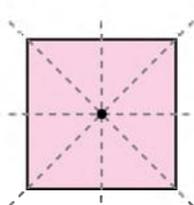


Рис. 165

Четырехугольник

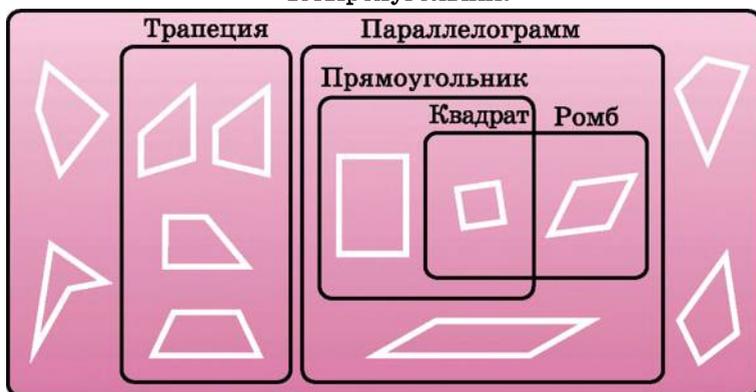


Рис. 166

- ?
1. Какой параллелограмм называется прямоугольником; ромбом?
 2. Какие точки называются осесимметричными; центрально-симметричными?
 3. Сформулируйте те свойства прямоугольника, которые перешли к нему от параллелограмма.
 4. Сформулируйте особые свойства прямоугольника.
 5. Сформулируйте признаки прямоугольника.
 6. Сформулируйте те свойства ромба, которые перешли к нему от параллелограмма.
 7. Сформулируйте особые свойства ромба.
 8. Сформулируйте признаки ромба.
 9. Дайте определение квадрату как виду прямоугольника; как виду ромба.
 10. Сформулируйте свойства квадрата.
 11. Сформулируйте признаки квадрата.
 12. Какие четырехугольники имеют центр симметрии?
 13. Назовите оси симметрии прямоугольника; ромба; квадрата.

310. Постройте прямоугольник, у которого:

- а) смежные стороны равны 4 см и 7 см;
- б) диагональ равна 55 мм, а ее угол со стороной составляет 35° ;
- в) сторона равна 48 мм, а диагональ — 60 мм;
- г) диагональ равна 60 мм, а угол между диагоналями — 55° ;
- д) сторона равна 45 мм, а угол между диагоналями — 40° .

- 311.** Постройте ромб, у которого:
- а) сторона равна 7 см, а угол — 35° ;
 - б) диагонали равны 56 мм и 40 мм;
 - в) сторона равна 48 мм, а диагональ — 60 мм;
 - г) диагональ равна 60 мм, а угол между диагональю и стороной — 55° .

312. Докажите, что если в четырехугольнике все углы прямые, то он является:

- а) параллелограммом;
- б) прямоугольником.

313. Диагональ прямоугольника образует с его стороной угол в 38° . Найдите угол между диагоналями.

314. Перпендикуляры, опущенные из точки пересечения диагоналей прямоугольника на его стороны, равны 3 см и 7 см. Найдите периметр прямоугольника.

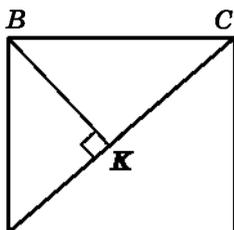


Рис. 167

315. Перпендикуляр из вершины прямого угла прямоугольника к его диагонали делит этот угол в отношении $7:8$ (рис. 167). Найдите:

- а) углы, которые диагональ образует со сторонами прямоугольника;
- б) угол между этим перпендикуляром и другой диагональю.

316. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямоугольника на его диагональ, делит ее в отношении $9:16$. Найдите периметр прямоугольника, учитывая, что точка пересечения его диагоналей отстоит на 40 см от:

- а) меньшей стороны;
- б) большей стороны.

317. Диагонали прямоугольника пересекаются под углом в 52° . Найдите углы, которые образует диагональ со сторонами прямоугольника.

318. Найдите диагонали прямоугольника, учитывая, что его стороны равны:

- а) 6 см и 8 см;
- б) 20 м и 21 м;
- в) 8 дм и 15 дм;
- г) 12 см и 35 см.

319. Диагональ ромба длиной 8 см образует с его стороной угол в 60° . Найдите сторону ромба.

320. Докажите, что если диагонали четырехугольника равны и точкой пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник — прямоугольник.

321. Найдите диагонали четырехугольника, вершинами которого являются точки пересечения биссектрис углов прямоугольника со сторонами 2 м и 6 м.

322. Четырехугольник $KLMN$ с равными диагоналями ограничен биссектрисами углов трапеции $ABCD$. Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм.

323. Найдите углы ромба и углы, которые сторона ромба образует с диагоналями, учитывая, что:

- а) одна из диагоналей равна стороне ромба;
- б) высоты, проведенные из одной его вершины, образуют угол в 40° .

324. Из равных треугольников составлен ромб. Какие это треугольники, если их использовано:

- а) 2; б) 4?

325. Достаточно ли для того, чтобы проверить, что данный четырехугольник является:

- а) прямоугольником, убедиться в том, что его диагонали равны;
- б) ромбом, убедиться в том, что одна часть четырехугольника совпадает с другой при сгибании четырехугольника по каждой диагонали?

326. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см, а один из углов — 120° . Постройте треугольник, симметричный данному треугольнику относительно середины его основания. Определите периметр и меньшую диагональ полученного четырехугольника.

327. Постройте квадрат, в котором:

- а) сторона равна 5 см; б) диагональ равна 6 см.

328. Определите, является ли четырехугольник квадратом, если:

- а) его диагонали равны и перпендикулярны;
- б) он ромб с равными диагоналями;
- в) его диагонали перпендикулярны и имеют общую середину;
- г) его диагонали перпендикулярны, равны и имеют общую середину.

329. Через вершины квадрата проведены прямые, параллельные его диагоналям. Определите вид четырехугольника, вершинами которого являются точки пересечения проведенных прямых. Найдите периметр этого четырехугольника, учитывая, что диагональ данного квадрата равна 12 см.

330. Из точки пересечения биссектрисы прямого угла прямоугольного треугольника с гипотенузой опущены перпендикуляры на катеты. Докажите, что полученный четырехугольник является квадратом.

331. Найдите:

- а) диагональ квадрата, сторона которого равна диагонали квадрата со стороной 1 м;

б) сторону квадрата, диагональ которого равна стороне квадрата с диагональю, равной 1 м.

332. Постройте:

- а) прямоугольник по диагонали и углу между диагоналями;
- б) прямоугольник по разности сторон и углу между диагональю и стороной;
- в) ромб по диагонали и одному из его углов;
- г) ромб по высоте и одному из его углов.

333. Упростите рациональное выражение:

а) $\left(\frac{x-y}{5x} - x + y\right) : \frac{y-x}{8} + \frac{8}{5x}$;

б) $\frac{5+4m^2}{2m+1} + \frac{1-10m}{4m^2+10m} \cdot \left(\frac{2m+5}{1+2m} - \frac{5+2m}{1-10m}\right)$.

334. Решите систему неравенств:

а)
$$\begin{cases} 36d - \frac{7d+9}{2} < \frac{1-2d}{7} - 1, \\ \frac{3+4d}{2} - 2d > 5 + \frac{2-3d}{2}; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \frac{3b-17}{5} + 6 < \frac{1-b}{2} + \frac{4b}{3}, \\ \frac{8-b}{3} > \frac{2b-5}{2} + 1. \end{cases}$$

335. Два участка — прямоугольный размерами 310 м × 250 м и квадратный — имеют ограды одинаковой длины. Площадь какого участка больше и на сколько?

336. Докажите, что:

а) если $a > 3$, то значение выражения $\left(\frac{a-3}{a+3} - \frac{a+3}{a-3}\right)\left(1 + \frac{3}{a}\right)$ отрицательное;

б) если $b > 1$, то значение выражения $\frac{b^2+3}{b-1} - \frac{2}{b} : \left(\frac{1}{b^2-b} + \frac{b-3}{b^2-1}\right)$ положительное.

337. На координатной плоскости постройте четырехугольник по координатам его вершин: $A(-2; 0)$, $B(0; 5)$, $C(2; 3)$, $D(3; -3)$. Найдите координаты:

- а) точки O пересечения диагоналей четырехугольника;
- б) середин P , Q , R , S его сторон AD , AB , BC , CD соответственно;
- в) точек M и N пересечения диагонали AC со сторонами четырехугольника $PQRS$;
- г) точек K и L пересечения диагонали BD со сторонами четырехугольника $PQRS$.

338. Измерьте стороны и углы четырехугольника $PQRS$, полученного при выполнении упражнения **337**. Сравните

между собой стороны и углы. Что вы можете сказать о четырехугольнике $PQRS$?

339. Периметр параллелограмма $QRST$ равен 16 м и отличается от периметра треугольника QRT на 1 м. Найдите стороны параллелограмма и его диагональ RT , учитывая, что одна сторона параллелограмма больше другой на 2 м.

* * *

340. Какое наименьшее количество множителей в произведении всех натуральных чисел от 1 до 28 нужно зачеркнуть, чтобы произведение оставшихся чисел было точным квадратом?

341. Найдите наименьшее число, которое начинается с цифры 1 и увеличивается втрое, если ее перенести в конец числа.

342. (Из коллекции профессора Брайена.) На этот раз профессор положил на стол синюю и белую карточки вообще без надписей (рис. 168).

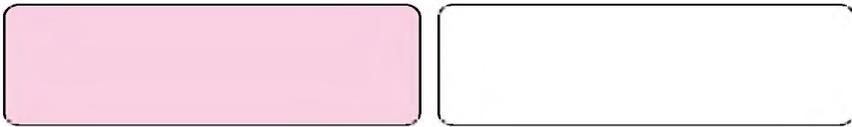


Рис. 168

— Неужели сегодня, уважаемый профессор, вы решили оставить нас на волю случая и отказываете в подсказках?

— Нет, для того, кто сегодня рискнет сыграть, у меня есть подсказки, — и профессор выложил еще два предложения, показанные на рисунке 169.

*На этой карточке
написано «Заплатите»*

*На обеих карточках
написано «Заплатите»*

Рис. 169

— А какая надпись соответствует синей карточке?

— Знать это вам совсем не обязательно, нужно только помнить, что если на синей карточке написано «Получите», то надпись на ее видимой стороне истинная, а если «Заплатите», то ложная. Для белой карточки все наоборот: если написано «Получите», то надпись на ее видимой стороне ложная, а если «Заплатите», то истинная.

Какую карточку нужно перевернуть, чтобы выиграть 10 фунтов?

Правообладатель Народная асвета



раздел

Квадратные корни

10. Рациональные числа

А. Множество натуральных чисел N является первым числовым множеством, которое вы изучали в школе (рис. 170). Сложение и умножение натуральных чисел также дают результатом натуральное число. Однако это не так для вычитания и деления натуральных чисел. Например, во множестве натуральных чисел выражения $3 - 7$ и $3 : 7$ не имеют значений.

Множество натуральных чисел

N

$1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Если a и b — натуральные числа, то $a + b$ и $a \cdot b$ также натуральные числа.

Разность $3 - 7$ не является натуральным числом.

Частное $3 : 7$ не является натуральным числом.

Рис. 170

Если множество натуральных чисел пополнить числами, противоположными натуральным числам, и числом 0 , то получится множество целых чисел Z (рис. 171). Сложение,

Множество целых чисел

Z

$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

Если a и b — целые числа, то $a + b, a - b$ и $a \cdot b$ также целые числа.

Частное $3 : 7$ не является целым числом.

Рис. 171

умножение и вычитание целых чисел также дают результатом целое число. Однако это не так для деления целых чисел: выражение $3 : 7$ не имеет значения во множестве целых чисел.

Если множество целых чисел пополнить дробными числами, то получится *множество рациональных чисел* Q (рис. 172). Сложение, умножение, вычитание и деление при не равном нулю делителе дают результатом рациональное число.

Множество рациональных чисел	
Q	
Целые числа ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...	Дробные числа $\frac{7}{12}$; $-\frac{7}{12}$; $3\frac{8}{9}$; $-3\frac{8}{9}$ и др.
<i>Если a и b — рациональные числа, то $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ ($b \neq 0$) также рациональные числа.</i>	

Рис. 172

Связи между множествами известных вам чисел показаны на рисунке 173.

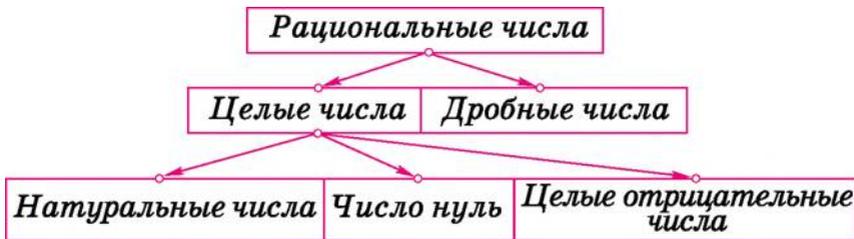


Рис. 173

Б. Любое рациональное число можно представить дробью вида $\frac{a}{b}$, где a — целое число, b — натуральное число, причем это представление неоднозначное:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{10}{20} = \frac{70}{140}; \quad 2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{10}{5} = \frac{70}{35};$$

$$-0,9 = \frac{-9}{10} = \frac{-18}{20} = \frac{-45}{50} = \frac{-324}{360};$$

$$-3\frac{1}{3} = \frac{-10}{3} = \frac{-20}{6} = \frac{-200}{60} = \frac{-3000}{900}.$$

Каждая из равных между собой дробей является представителем некоторого рационального числа. Среди представителей того или иного рационального числа есть представитель с наименьшим знаменателем. Этот представитель является несократимой дробью.

Любое рациональное число можно представить десятичной дробью. Причем *если разложение знаменателя несократимого представителя этого числа является произведением только двоек и пятерок, то получается конечная десятичная дробь*. Например:

$$\begin{aligned} \frac{37}{40} &= \frac{37}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{37 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{37 \cdot 5 \cdot 5}{(2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5)} = \\ &= \frac{37 \cdot 25}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{925}{1000} = 0,925. \end{aligned}$$

$$\frac{11}{250} = \frac{11}{2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{11 \cdot 2 \cdot 2}{(2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5)} = \frac{11 \cdot 4}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{44}{1000} = 0,044.$$

Если разложение знаменателя несократимого представителя рационального числа содержит хотя бы один простой множитель, отличный от 2 и 5, то получается бесконечная периодическая десятичная дробь.

Найдем десятичное представление числа $\frac{16}{37}$, поделив числитель 16 на знаменатель 37.

$$\begin{array}{r} 16 \overline{)37}, \\ \underline{0} , \end{array} \quad \begin{array}{r} -160 \overline{)37}, \\ \underline{148} , \\ 12 , \end{array} \quad \begin{array}{r} -160 \overline{)37}, \\ \underline{148} , \\ 120 \\ \underline{111} \\ 9 , \end{array} \quad \begin{array}{r} -160 \overline{)37}, \\ \underline{148} , \\ 120 \\ \underline{111} \\ 90 \\ \underline{74} \\ 16 , \end{array}$$

Проведя 4 шага деления, замечаем, что очередной остаток 16 повторил число, с которого началось деление. Это означает, что будут повторяться и следующие остатки, причем в том же порядке, а значит, будут повторяться и цифры частного. Таким образом,

$$\frac{16}{37} = 0,432432432... .$$

Повторяющаяся группа цифр 432 называется **периодом** десятичной дроби, а сама дробь — **бесконечной периодической десятичной дробью**.

Бесконечные периодические десятичные дроби принято записывать короче, заключая период в скобки:

$$\frac{16}{37} = 0,(432).$$

Запись $0,(432)$ читают: «0 целых и 432 в периоде».

При представлении некоторых рациональных чисел десятичными дробями повторяющаяся группа цифр может начинаться не сразу после целой части. Например:

$$\frac{47}{74} = 0,6351351351\dots = 0,6(351);$$

$$2\frac{19}{22} = 2,8636363\dots = 2,8(63);$$

$$13\frac{41}{75} = 13,54666\dots = 13,54(6);$$

$$3\frac{95}{148} = 3,64189189189\dots = 3,64(189).$$

Группа цифр между целой частью и периодом называется *предпериодом*. В записи $13,54(6)$ предпериод равен 54, период равен 6. Эта запись читается: «13 целых 54 сотых и 6 в периоде».

Таким образом, любое рациональное число можно представить конечной десятичной дробью или бесконечной периодической десятичной дробью.

В. Верно и обратное утверждение: каждая десятичная дробь, как конечная, так и бесконечная периодическая, представляет некоторое рациональное число.

Вы умеете от представления рационального числа конечной десятичной дробью перейти к его представлению обыкновенной дробью:

$$0,16 = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}; \quad 6,375 = 6\frac{375}{1000} = 6\frac{3}{8}.$$

▲ При переходе от бесконечной периодической десятичной дроби к обыкновенной дроби можно пользоваться следующими правилами:

1. Бесконечная десятичная периодическая дробь без предпериода равна обыкновенной дроби, числитель которой равен периоду, а знаменатель — числу, записанному столькими

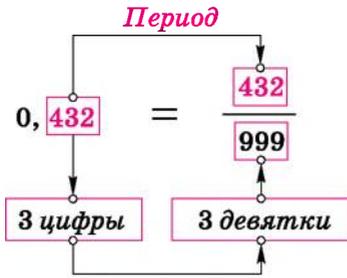


Рис. 174

девятками, сколько цифр в периоде (рис. 174).

$$0,(432) = \frac{432}{999} = \frac{48}{111} = \frac{16}{37}.$$

2. Бесконечная десятичная периодическая дробь с предпериодом равна обыкновенной дроби, числитель которой равен разности между числом, записанным цифрами от десятичной запятой до конца первого периода, и числом, записанным цифрами предпериода, а знаменатель — числу, записанному столькоими девятками, сколько цифр в периоде, и столькоими нулями, сколько цифр в предпериоде:

$$0,6(351) = \frac{6351 - 6}{9990} = \frac{6345}{9990} = \frac{705}{1110} = \frac{141}{222} = \frac{47}{74},$$

$$3,64(189) = 3 + \frac{64189 - 64}{99900} = 3 + \frac{64125}{99900} = 3 + \frac{2565}{3996} =$$

$$= 3 + \frac{285}{444} = 3 + \frac{95}{148} = 3\frac{95}{148} \text{ (рис. 175). } \blacktriangle$$

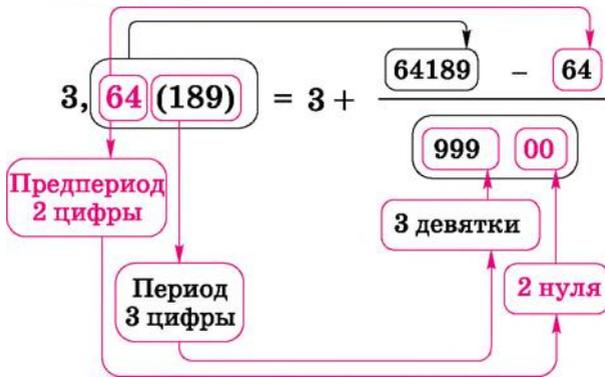


Рис. 175

- ?
1. Выполнение каких действий над натуральными числами всегда дает результатом натуральное число? Какие действия не всегда выполнимы во множестве натуральных чисел?
 2. Как из множества натуральных чисел получить множество целых чисел?
 3. Выполнение каких действий над целыми числами всегда дает в результате целое число? Какие действия не всегда выполнимы во множестве целых чисел?

4. Как из множества целых чисел получить множество рациональных чисел?
5. Выполнение каких действий над рациональными числами всегда дает результатом рациональное число?
6. Дробью какого вида можно представить любое рациональное число?
7. Какое рациональное число можно представить конечной десятичной дробью?
8. Какое рациональное число представляется бесконечной периодической десятичной дробью?
9. Что называют периодом бесконечной периодической десятичной дроби; предпериодом бесконечной периодической десятичной дроби?
10. Как читают бесконечные периодические десятичные дроби без предпериода; с предпериодом?
11. Как конечную десятичную дробь преобразовать в обыкновенную?

343. Есть числа -97 ; $-1,27$; $-\frac{5}{7}$; 0 ; $0,08$; $4\frac{9}{18}$; 19 ; 123 .

Выпишите из них те, которые являются:

- а) натуральными;
- б) целыми;
- в) целыми отрицательными;
- г) целыми неотрицательными;
- д) целыми положительными;
- е) целыми неположительными;
- ж) дробными положительными;
- з) дробными отрицательными;
- и) рациональными;
- к) рациональными положительными;
- л) рациональными отрицательными;
- м) рациональными неотрицательными.

344. Определите, истинно ли утверждение:

- а) каждое натуральное число является целым;
- б) каждое натуральное число является рациональным;
- в) каждое натуральное число является положительным;
- г) каждое натуральное число является отрицательным;
- д) каждое натуральное число является неотрицательным;
- е) каждое натуральное число является нецелым;
- ж) каждое натуральное число является иррациональным.

345. Определите, истинно ли утверждение:

- а) каждое целое число является натуральным;
- б) каждое целое число является рациональным;
- в) каждое целое число является положительным;
- г) каждое целое число является отрицательным;
- д) каждое целое число является ненатуральным;
- е) каждое целое число является недробным;
- ж) каждое целое число является иррациональным.

346. Отношением целого числа к натуральному несколькими способами представьте рациональное число:

- а) $1\frac{2}{3}$; б) 18; в) $-0,3$; г) $3\frac{4}{5}$.

347. Несократимой дробью представьте рациональное число:

- а) $2\frac{2}{3}$; б) -11 ; в) $-1,9$; г) $15\frac{7}{15}$.

348. Десятичной дробью представьте рациональное число:

- а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{7}$; в) $-\frac{7}{15}$; г) $-\frac{17}{20}$; д) $-1\frac{7}{40}$.

349. Десятичной дробью представьте рациональное число:

- а) $\frac{8}{3}$; б) $\frac{1}{7}$; в) $\frac{19}{21}$; г) $-\frac{19}{55}$; д) $7\frac{7}{111}$.

350. Сравните рациональные числа:

- а) 0,234 и 0,238; в) $\frac{7}{8}$ и 0,875;
б) $-2,786$ и $-2,768$; г) 0,68(3) и $\frac{41}{60}$.

351. Сравните рациональные числа:

- а) $\frac{100}{101}$ и 0,99; г) $\frac{300}{808}$ и 0,3713;
б) $\frac{11}{101}$ и 0,1089; д) $\frac{517}{2525}$ и 0,2047;
в) $\frac{151}{808}$ и 0,18688; е) $\frac{1099}{2525}$ и 0,435248.

352. Найдите представление бесконечной периодической десятичной дробью рационального числа с числителем 13 и знаменателем:

- а) 9; б) 11; в) 16; г) 21; д) 27.

353. Обыкновенной дробью представьте рациональное число:

- а) 0,(24); г) 4,9(3);
б) 0,(45); д) $-6,736(1)$;
в) 3,23(5); е) 0,(923076).

354. Докажите, что:

- а) если a — четное число, то и a^2 — также четное число;
б) если a^2 — четное число, то и a — также четное число;
в) если a — нечетное число, то и a^2 — также нечетное число;
г) если a^2 — нечетное число, то и a — также нечетное число.

355. Рациональной дробью представьте выражение:

- а) $\frac{2m}{m+n} - \frac{3n}{m-n} + \frac{4mn}{m^2-n^2}$;
б) $\frac{4}{b-4} + \frac{8-b}{b^3-64} : \frac{b-8}{16b+4b^2+b^3}$;
в) $\left(1 + \frac{k}{1-k}\right) \cdot \frac{1-k^2}{l+1} : \frac{k^2+k}{1-l^2}$;
г) $\left(\frac{r^2+s^2}{r^2-s^2} + \frac{r+s}{r-s}\right) \cdot \left(\frac{r^3+s^3}{r^3-s^3} + \frac{r+s}{r-s}\right)$.

356. Упростите выражение:

- а) $a^{-2}a^8$; в) $p^{-i}p^{2i}$; д) $e^{-7} : e^4$; ж) $x^{-t} : x^{-2t}$;
б) b^2b^{-8} ; г) $q^{-3l}q^{2l}$; е) $f^8 : f^{-5}$; з) $y^{-3i} : y^{-5i}$.

357. Точки M , N , O , P расположены на прямой так, что $MN = 21$, $NO = 32$, $OP = 10$. Найдите длины отрезков MP и MO , учитывая, что:

- а) луч OM содержит точки N и P ;
б) луч OM содержит точку N и не содержит точки P .

358. На продолжении стороны MN равнобедренного треугольника с основанием MP за точку N отложили отрезок NO , равный MN . Докажите, что треугольник MOP прямоугольный.

359. Найдите точку $A_1(x_1)$, симметричную точке $A(x)$ относительно точки $S(a)$, если:

- а) $a = 0$; $x = 5$; в) $a = -4$; $x = 3$;
б) $a = -2$; $x = 3$; г) $a = -5$; $x = -1$.

360. Кусок сплава меди с цинком массой 36 кг содержит 45 % меди. Сколько меди нужно добавить к этому куску, чтобы после переплавки получить сплав с 60-процентным содержанием меди?

361. Есть два сплава золота с серебром. В первом сплаве массы этих металлов относятся как 1 : 2, а во втором — как 2 : 3. Сколько граммов первого и второго сплавов нужно взять, чтобы получить 19 г сплава, в котором золото и серебро находятся в отношении 7 : 12?

362. Есть три куска сплавов меди с никелем, в которых эти металлы содержатся по массе в отношениях 2 : 1, 3 : 1 и 5 : 1. Из них сплавлен кусок массой 12 кг, в котором отно-

шение массы меди к массе никеля равно 4 : 1. Найдите массу каждого из исходных кусков, если масса первого из них вдвое больше массы второго.

363. Сплав состоит из олова, меди и цинка. Если 20 г этого сплава сплавить с 2 г олова, то в полученном сплаве масса меди будет равной массе олова. А если же 30 г исходного сплава сплавить с 9 г цинка, то в новом сплаве масса олова будет равной массе цинка. Определите процентный состав исходного сплава.

* * *

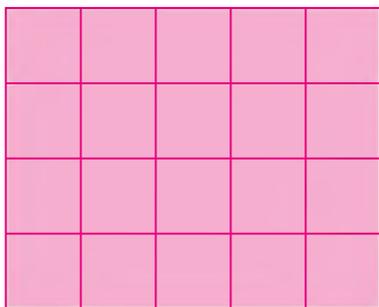


Рис. 176

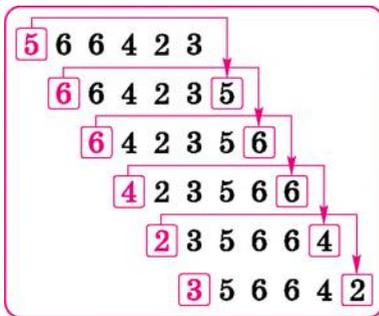


Рис. 177

364. Прямоугольник размерами 4 на 5 клеток (рис. 176) нужно разрезать на две равные фигуры. Сколькими способами можно это сделать, если разрезание можно вести по сторонам клеток? (Два разреза считаются различными, если их результатами являются неравные фигуры.)

365. Числа 7, 11, 13, 37 интересны тем, что если на какое-либо из этих чисел делится шестизначное число, то на него делится и любое другое, полученное из исходного круговой перестановкой цифр. Например, на 13 делится как число 566 423, так и числа 664 235, 642 356, 423 566, 235 664, 356 642 (рис. 177). Объясните, почему так происходит.

366. (Из коллекции профессора Брайена.) Профессор на этот раз подготовил три карточки — синюю, белую и серую — с надписями «Получите», «Заплатите» и «Не беспокойте», показанные на рисунке 178.

— Какие сегодня правила игры?

— Если игрок открыл карточку «Получите», то он получает 10 фунтов, если карточку «Заплатите», то должен сам уплатить 10 фунтов, если карточку «Не беспокойте», то за

*На этой карточке
написано «Получите»*

*На синей карточке
написано «Не беспокойте»*

*На этой карточке
написано «Заплатите»*

Рис. 178

беспокойство игрок должен уплатить 1 фунт. Учтите, что не все подсказки на карточках ложны.

Какую карточку нужно перевернуть, чтобы выиграть 10 фунтов?

11. Иррациональные числа

А. Пример 1. Найдем площадь S прямоугольника со сторонами $a = 4$ и $b = 9$ (рис. 179). Используя формулу площади прямоугольника, получаем

$$S = 4 \cdot 9 = 36.$$

Пример 2. Найдем сторону c квадрата (рис. 180), площадь которого равна площади прямоугольника с измерениями 4 и 9. Площадь квадрата равна 36. Тогда сторона c квадрата должна удовлетворять условию

$$c^2 = 36.$$

Нетрудно догадаться, что $c = 6$.
Рассмотрим уравнение

$$y^2 = 36,$$

где y — переменная. Это уравнение можно записать в виде

$$(y - 6)(y + 6) = 0.$$

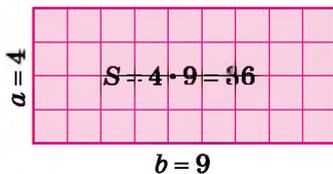


Рис. 179

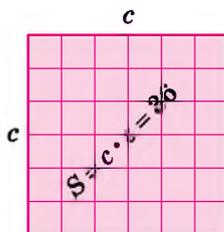


Рис. 180

Отсюда

$$y = 6 \text{ или } y = -6.$$

Числа 6 и -6 оба удовлетворяют уравнению $y^2 = 36$. Их называют квадратными корнями из числа 36.

Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a .

Неотрицательный корень уравнения $y^2 = 36$, т. е. число 6, называют арифметическим квадратным корнем из числа 36.

Арифметическим квадратным корнем из числа a называют неотрицательное число, квадрат которого равен a .

Значение квадратного корня из 36

$$\sqrt{36} = 6$$

Подкоренное выражение

Рис. 181

Арифметический квадратный корень из числа a обозначают \sqrt{a} и читают «Квадратный корень из a ».

Знак $\sqrt{\quad}$ называют **знаком арифметического квадратного корня**. Выражение a , записанное под знаком корня, называют **подкоренным выражением** (рис. 181).

Пример 3. а) $\sqrt{25} = 5$, поскольку $5 \geq 0$ и $5^2 = 25$;

б) $\sqrt{1,44} = 1,2$, поскольку $1,2 \geq 0$ и $1,2^2 = 1,44$;

в) $\sqrt{0} = 0$, поскольку $0 \geq 0$ и $0^2 = 0$;

г) $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$, поскольку $\frac{5}{6} \geq 0$ и $(\frac{5}{6})^2 = \frac{25}{36}$.

Вообще, равенство

$$\sqrt{a} = x$$

означает, что

$$x \geq 0 \text{ и } x^2 = a.$$

Б. Действие нахождения квадратного корня из числа называют **извлечением квадратного корня** (рис. 182). Извлечение квадратного корня является действием, обратным действию возведения в квадрат (рис. 183).

$$\sqrt{36} = 6$$

Нахождение квадратного корня

Рис. 182

Возведение в квадрат

$$6^2 = 36$$

Рис. 183

Действие, обратное возведению в третью степень, называют *извлечением кубического корня*, возведению в четвертую степень — *извлечением корня четвертой степени* и т. д. Вообще, **корнем степени n из числа a** называют такое число x , n -я степень которого равна числу a .

Возведение в квадрат можно выполнить над любым числом, а извлечение квадратного корня невыполнимо для отрицательного подкоренного выражения. Например, выражение $\sqrt{-4}$ не имеет значения, поскольку нет такого числа, квадрат которого был бы равен -4 .

Пример 4. Найдем длину диагонали квадрата со стороной 1 (рис. 184). По теореме Пифагора

$$AC^2 = AB^2 + BC^2,$$

или

$$AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

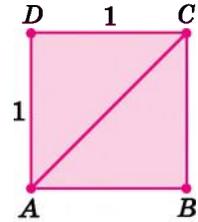


Рис. 184

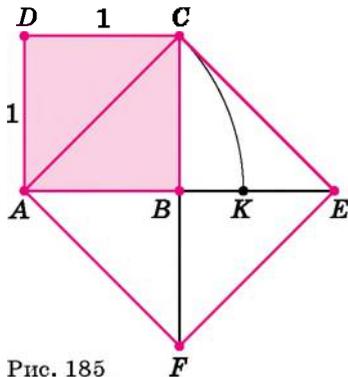


Рис. 185

В том, что $AC^2 = 2$, можно убедиться и через построение. Построим на диагонали единичного квадрата $ABCD$ новый квадрат $ACEF$ (рис. 185). Видно, что площадь этого квадрата в два раза больше площади квадрата $ABCD$, т. е. равна 2. С другой стороны, эта площадь равна AC^2 . Поэтому $AC^2 = 2$.

Докажем, что среди рациональных чисел нет такого числа, которое бы выражало длину диагонали единичного квадрата. Допустим, что это не так, т. е. что есть рациональное число, квадрат которого равен 2. Это число можно представить *несократимой дробью* $\frac{a}{b}$. Поскольку $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$, то $\frac{a^2}{b^2} = 2$, или

$$a^2 = 2b^2. \quad (1)$$

Число $2b^2$ четное, поэтому четное и равное ему число a^2 . Но тогда и *число a четное*. Значит, $a = 2c$, где c — некоторое натуральное число. С учетом этого равенство (1) переписывается

так: $(2c)^2 = 2b^2$, или $4c^2 = 2b^2$, или $2c^2 = b^2$. Поскольку число $2c^2$ четное, то четное и число b^2 , а значит, и число b четное.

Мы получили, что числитель a и знаменатель b дроби $\frac{a}{b}$ оба четные. Значит, дробь $\frac{a}{b}$ можно сократить на 2, хотя по условию эта дробь несократима. Причиной полученного противоречия является наше допущение о существовании рационального числа, квадрат которого равен 2. Значит, это допущение нужно отклонить и согласиться с тем, что нет рационального числа, квадрат которого равен двум.

Таким образом, число $\sqrt{2}$ не является рациональным. Поэтому его десятичное представление является бесконечной непериодической дробью:

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095048801688724209... .$$

Числа, которые представляются бесконечными непериодическими десятичными дробями, называются **иррациональными** (рис. 186).



Рис. 186

Приводим примеры иррациональных чисел:

$$\sqrt{13} = 3,605661275463989...;$$

$-5,7277227772227772222... (количество семерок и двоек после десятичной запятой каждый раз увеличивается на единицу);$



Рис. 187

$$-0,123456789101112131415...$$

(после десятичной запятой друг за другом записываются последовательные натуральные числа);

$$\pi = 3,141592653589793238... .$$

Существование иррациональных чисел было установлено математической школой Пифагора (около 570 — около 500 до н. э.) (рис. 187).

Выражение \sqrt{a} имеет значение, если $a \geq 0$.

В соответствии с определением арифметического квадратного корня при любом значении a , $a \geq 0$, истинно равенство:

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Знак $\sqrt{\quad}$ для обозначения квадратного корня из числа ввел в 1525 г. чешский математик Кристиан Рудольф (1499—1545).



1. Какое число называют квадратным корнем из данного числа?
2. Какое число называют арифметическим квадратным корнем из данного числа?
3. Как читают выражение \sqrt{a} ? Какое выражение называют подкоренным?
4. Какое действие называют действием извлечения квадратного корня? Как оно связано с действием возведения в квадрат?
5. Как обосновать тождество $(\sqrt{a})^2 = a$?
6. Какие числа называют иррациональными? Приведите примеры иррациональных чисел.
7. При каких значениях a выражение \sqrt{a} имеет значение?

367. Запишите три примера:

- а) рациональных чисел; б) иррациональных чисел.

368. Даны числа: $4,01$; $\frac{5}{11}$; $-3,(3)$; $\sqrt{\frac{1}{9}}$; 0 ; $\sqrt{2}$; $-1,23(45)$; $3,1929394959\dots$ (девятки разделяют последовательные натуральные числа); π ; $-12\frac{13}{14}$; $-0,10200300040000500000\dots$ (количество нулей, разделяющих последовательные натуральные числа, каждый раз увеличивается на единицу); $\sqrt{4}$. Выпишите из них:

- а) рациональные числа; б) иррациональные числа.

369. Вычислите:

- а) $\sqrt{9}$; в) $\sqrt{\frac{1}{9}}$; д) $\sqrt{\frac{9}{25}}$; ж) $\sqrt{0,09}$;
б) $\sqrt{25}$; г) $\sqrt{\frac{1}{25}}$; е) $\sqrt{\frac{9}{100}}$; з) $\sqrt{0,25}$.

370. Найдите значение выражения:

- а) $3 + \sqrt{16}$; в) $11 - \sqrt{36}$; д) $\sqrt{0,09} + \sqrt{1,21}$;
б) $10 \cdot \sqrt{49}$; г) $\sqrt{225} : \sqrt{\frac{25}{4}}$; е) $\sqrt{3,24} \cdot \sqrt{\frac{1}{81}}$.

371. Укажите записью, как на рисунке 188, между какими ближайшими целыми числами заключено число:

$$9 < \pi^2 < 10$$

Рис. 188

- а) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{63}$; д) $-\sqrt{75}$;
б) $\sqrt{10}$; г) $-\sqrt{3}$; е) $-\sqrt{401}$.

372. Округлите с точностью до тысячных число:

- а) 0,234567...; г) 2,9876543...;
б) 0,234353...; д) 0,7997999799...;
в) -5,010220333...; е) -9,0071172273... .

373. Докажите иррациональность числа:

- а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{6}$; в) $1,5 + \sqrt{2}$; г) $-\sqrt{3} - \frac{17}{19}$.

374. Используя определение квадратного корня, сравните числа:

- а) $\sqrt{5}$ и 2,2; б) $\sqrt{10}$ и 3,1; в) $-\sqrt{10}$ и $-\sqrt{11}$.

375. Используя определение квадратного корня, сравните числа:

- а) 2,7 и $\sqrt{7}$; б) $\sqrt{10}$ и $\sqrt{11}$; в) $-\sqrt{10}$ и -3,2.

376. Докажите, что число:

- а) 7 является арифметическим квадратным корнем из числа 49;
б) 1,5 является арифметическим квадратным корнем из числа 2,25;
в) -7 не является арифметическим квадратным корнем из числа 49;
г) -1,5 не является арифметическим квадратным корнем из числа 2,25;
д) 0,7 не является арифметическим квадратным корнем из числа 4,9;
е) 0,7 является арифметическим квадратным корнем из числа 0,49.

377. Докажите, что:

- а) $\sqrt{169} = 13$; в) $\sqrt{0,16} = 0,4$;
б) $\sqrt{10\,000} = 100$;

378. Найдите значение арифметического квадратного корня из числа:

- а) 100; г) 900; ж) 0,49; к) $\frac{64}{49}$;
б) 81; д) 3600; з) 0,81; л) $2\frac{1}{4}$;
в) 64; е) 4900; и) 0,01; м) $2\frac{14}{25}$.

379. Найдите значение квадратного корня из числа:

- а) 9; г) 400; ж) 0,09; к) $\frac{81}{16}$;
б) 121; д) 6400; з) 1,21; л) $6\frac{1}{4}$;
в) 289; е) 8100; и) 0,04; м) $7\frac{1}{9}$.

380. Решите уравнение:

- а) $a^2 = 4$; в) $b^2 = 16$; д) $c^2 = 1,96$; ж) $d^2 = 2\frac{1}{4}$;
б) $x^2 = 25$; г) $y^2 = 100$; е) $z^2 = \frac{1}{4}$; з) $t^2 = 6\frac{1}{4}$.

381. Найдите значение выражения $\sqrt{m+n}$, если:

- а) $m = 17$, $n = 8$; г) $m = -9$, $n = 25$;
б) $m = 20$, $n = 16$; д) $m = -\frac{3}{16}$, $n = \frac{1}{4}$;
в) $m = 51$, $n = -2$; е) $m = \frac{2}{9}$, $n = \frac{17}{36}$.

382. Найдите значение выражения $a + \sqrt{a}$, если a равно:

- а) 0,01; в) 0,64; д) $\frac{9}{25}$;
б) 1; г) 1,21; е) $6\frac{1}{4}$.

383. Определите, имеет ли значение выражение:

- а) $\sqrt{81}$; д) $\sqrt{-14}$; и) $\sqrt{-9^2 \cdot 4^2}$;
б) $-\sqrt{81}$; е) $-\sqrt{14}$; к) $-\sqrt{9^2 \cdot (-4)^2}$;
в) $\sqrt{-81}$; ж) $\sqrt{(9)^2}$; л) $\sqrt{-9^2 \cdot (-4)^2}$;
г) $\sqrt{14}$; з) $\sqrt{(-9)^2 \cdot (-4)^2}$; м) $\sqrt{9^2 \cdot (-4)^2}$.

384. Существует ли значение переменной, при котором истинно равенство:

- а) $\sqrt{a} = 9$; в) $\sqrt{c} = -5$; д) $\sqrt{f} - 2 = 1$;
б) $\sqrt{b} = 2$; г) $7\sqrt{d} = 11$; е) $\sqrt{g} + 3 = 4$?

385. При каком значении переменной истинно равенство:

- а) $\sqrt{m} = 10$; в) $6\sqrt{k} = 10$; д) $\sqrt{p} - 3 = 0$;
б) $10\sqrt{n} = 2$; г) $\sqrt{l} = -1$; е) $\sqrt{q} + 5 = 0$?

386. Найдите значение переменной, при котором истинно равенство:

а) $\sqrt{2x+3} = 6$; б) $\sqrt{0,1z+2} = 7$; в) $\sqrt{\frac{1}{3}k - \frac{1}{2}} = 0$.

387. На координатной прямой покажите точку, координата которой равна:

а) 3; б) $-4,5$; в) $\frac{2}{3}$; г) $-5\frac{5}{7}$.

388. Запишите координаты точек, указанных на координатной прямой на рисунке 189.

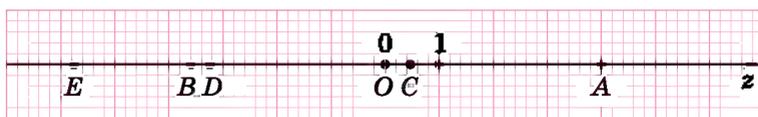


Рис. 189

389. Точки A, B, C на прямой расположены так, что точка B принадлежит отрезку AC . Покажите на этой прямой все такие точки X , которые расположены ближе к точке B , чем к точке A , и ближе, чем к точке C .

390. Точки A, B, C на прямой расположены так, что точка B не принадлежит отрезку AC . Покажите на этой прямой все такие точки X , которые расположены ближе к точке B , чем к точке A , и ближе, чем к точке C .

391. Докажите, что если середины двух отрезков MN и PQ , расположенных на одной прямой, совпадают, то отрезки MP и NQ равны.

392. Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы, проведенные к соответственно равным сторонам, равны.

393. Есть два сплава из цинка, меди и олова, первый из которых содержит 40 % олова, а второй — 26 % меди. Процентные содержания цинка в первом и во втором сплавах одинаковы. Сплавив 600 г первого сплава и 1 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30 % цинка. Сколько олова (по массе) содержится в полученном сплаве?

394. Есть два сплава меди с цинком, из которых первый содержит меди 81 %, а второй — 87 %. В каком отношении нужно взять эти сплавы, чтобы получить новый сплав, в котором 85 % меди?

* * *

395. (Из коллекции профессора Брайена.) Сегодня профессор подготовил карточки, показанные на рисунке 190.

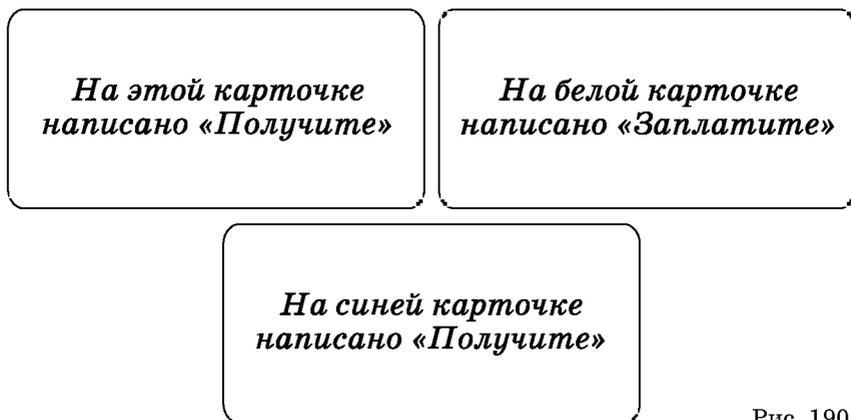


Рис. 190

— Какие сегодня условия игры?

— Условия прежние: если игрок открыл карточку «Получите», то он получает 10 фунтов, если карточку «Заплатите», то должен сам уплатить 10 фунтов, если карточку «Не беспокойте», то за беспокойство игрок должен уплатить 1 фунт.

— А что известно о надписях?

— На карточке «Не беспокойте» подсказка истинная, а на карточке «Заплатите» ложная.

— Профессор, а что вы скажете о карточке «Получите»?

— Ничего определенного: подсказка на ней может быть истинной, а может быть и ложной.

Какую карточку нужно перевернуть, чтобы выиграть 10 фунтов?

396. На плоскости отмечена точка M и начерчены две окружности. Как построить отрезок, концы которого находятся на данных окружностях, а середина — в точке M ?

397. Докажите, что если числа a, b, c удовлетворяют условию $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, то среди них есть пара противоположных.

12. Действительные числа

А. Рациональные и иррациональные числа вместе составляют множество действительных чисел (рис. 191).

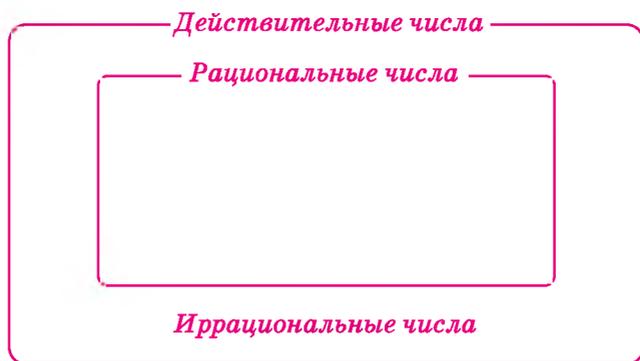


Рис. 191

Действительные числа сравнивают по тем же правилам, что и рациональные числа.

Пример 1. Сравним числа $0,45678\dots$ и $-1,23459\dots$. Поскольку первое из данных чисел положительное, а второе отрицательное, то

$$0,45678\dots > -1,23459\dots$$

Пример 2. Сравним числа $3,14159\dots$ и $3,14295\dots$. У этих бесконечных десятичных дробей одинаковые целые части, десятые и сотые, но разряд тысячных первого числа содержит 1 единицу, а второго — 2 единицы. Поэтому

$$3,14159\dots < 3,14295\dots$$

Арифметические действия над действительными числами определяются так, чтобы свойства этих действий были такими же, как и для рациональных чисел. В практических задачах при выполнении действий над действительными числами их обычно заменяют десятичными приближениями с соответствующей точностью.

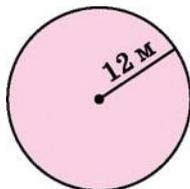


Рис. 192

Пример 3. Найдем площадь круга с радиусом r , равным 12 м (рис. 192). Площадь круга S вычисляется по формуле $S = \pi r^2$. Возьмем $\pi = 3,14$, получим:

$$S \approx 3,14 \cdot 12^2 = 452,16 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Пример 4. Найдем гипотенузу BC прямоугольного треугольника с катетами $AB = 3$ м и $AC = 5$ м (рис. 193). По теореме Пифагора получим: $BC = \sqrt{3^2 + 5^2}$. Значение подкоренного выражения $3^2 + 5^2$ равно 34. Поэтому $BC = \sqrt{34}$. Чтобы продолжить вычисления, нужно научиться выполнять действие извлечения квадратного корня.

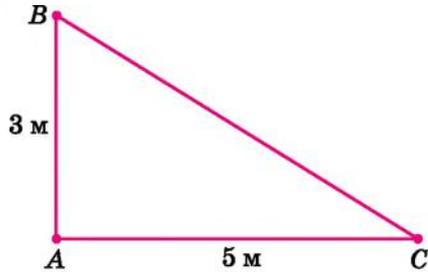


Рис. 193

Пример 5. Найдем приближенное значение $\sqrt{34}$ с точностью до тысячных, используя определение квадратного корня.

Поскольку $5^2 = 25$, а $6^2 = 36$, то число $\sqrt{34}$ заключено между целыми числами 5 и 6 (рис. 194): $5 < \sqrt{34} < 6$. Поэтому

$$\sqrt{34} = 5, \dots$$



Рис. 194

Найдем цифру десятых. Для этого сначала испытаем середину 5,5 промежутка (5; 6). Имеем: $5,5^2 = 30,25$. Поскольку $30,25 < 34$, то для дальнейшего рассмотрения выбираем промежуток (5,5; 6). Поскольку $5,8^2 = 33,64$, а $5,9^2 = 34,81$, то $5,8 < \sqrt{34} < 5,9$ (рис. 195). Значит,

$$\sqrt{34} = 5,8 \dots$$

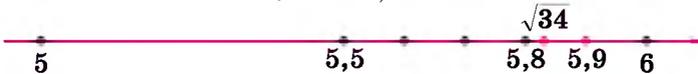


Рис. 195

Найдем цифру сотых. Имеем: $5,85^2 = 34,2225$, $5,84^2 = 34,1056$, а $5,83^2 = 33,9889$. Значит, $5,83 < \sqrt{34} < 5,84$ (рис. 196). Поэтому

$$\sqrt{34} = 5,83 \dots$$



Рис. 196

Найдем цифру тысячных. Имеем: $5,835^2 = 34,047225 > 34$, поэтому далее рассматриваем промежуток $(5,830; 5,835)$. Поскольку $5,832^2 = 34,012224$, $5,831^2 = 34,0000561$, а $5,830^2 = 33,9889$, то $\sqrt{34} = 5,830\dots$.

Найдем цифру десятитысячных. Имеем:

$$5,8305^2 = 33,99473025 < 34,$$

поэтому далее рассматриваем промежуток $(5,8305; 5,8310)$. Поскольку $5,8309^2 = 33,99939481$, а $5,8310^2 = 34,000561$, то

$$\sqrt{34} = 5,8309\dots$$

Значит,

$$\sqrt{34} \approx 5,831.$$

Отметим, что мы нашли дополнительно цифру десятитысячных, чтобы правильно провести округление.

▲ Описанный процесс нахождения квадратного корня называют *методом последовательных приближений*. Рассмотрим еще один алгоритм.

Б. Пример 6. Найдем приближенное значение $\sqrt{74089}$ с точностью до целых.

Разделим справа налево запись числа 74 089 на грани из двух цифр:

$$\sqrt{7'40'89'}$$

Подберем для левой грани — числа 7 — наибольшее число, квадрат которого не превосходит эту грань. Таким числом является число 2, поскольку $2^2 = 4 < 7$, а $3^2 = 9 > 7$. Это первая цифра результата.

Возведем подобранную цифру в квадрат и подпишем результат под гранью 7.

$$\begin{array}{r} \sqrt{7'40'89'} = 2\dots \\ \underline{- 4} \end{array}$$

Выполним вычитание и снесем следующую грань 40 — получим рабочее число 340, которое позволит найти вторую цифру результата. Результат 2 удвоим и запишем слева от рабочего числа 340. К удвоенному результату 4 подпишем такую цифру *, чтобы при умножении числа $4*$ на число * получилось наибольшее число, не превосходящее рабочее число 340.

Такой цифрой оказывается цифра 7. Умножим 47 на 7 и полученное произведение 329 подпишем под рабочим числом 340. Подбранную цифру 7 запишем в результат, где теперь есть 27.

$$\begin{array}{r} \sqrt{7'40'89} = 27 \\ \underline{4} \\ 47 \mid \underline{340} \\ 7 \mid \underline{329} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{7'40'89} = 272 \\ \underline{4} \\ 47 \mid \underline{340} \\ 7 \mid \underline{329} \\ \hline 542 \mid \underline{1189} \\ 2 \mid \underline{1084} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{7'40'89} = 272 \\ \underline{4} \\ 47 \mid \underline{340} \\ 7 \mid \underline{329} \\ \hline 542 \mid \underline{1189} \\ 2 \mid \underline{1084} \\ \hline 105 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{7'40'89} = 272 \\ \underline{4} \\ 47 \mid \underline{340} \\ 7 \mid \underline{329} \\ \hline 542 \mid \underline{1189} \\ 2 \mid \underline{1084} \\ \hline 5441 \mid \underline{10500} \\ 1 \mid \underline{5441} \\ \hline 5059 \end{array}$$

К результату 11 вычитания 329 из 340 снесем следующую грань 89 — получим новое рабочее число 1189, которое позволит найти третью цифру результата. Имеющийся результат 27 удвоим и запишем слева от рабочего числа 1189. К удвоенному результату 54 подпишем такую цифру *, чтобы при умножении числа 54* на число * получилось наибольшее число, не превосходящее рабочее число 1189. Такой цифрой оказывается цифра 2. Результат 1084 умножения 542 на 2 подпишем под рабочим числом 1189. Подбранную цифру 2 запишем в результат, где теперь уже записано 272. Это целая часть результата.

Все следующие сносимые грани состоят из двух нулей. Следующая цифра результата — цифра десятых — это цифра 1. Если взять цифру 2, то умножение даст результат 10 884, что уже больше рабочего числа 10 500.

Теперь понятно, что с точностью до целых

$$\sqrt{74089} \approx 272. \blacktriangle$$

Б. В практических расчетах для нахождения приближенных значений квадратных корней используют калькулятор или специальные таблицы.

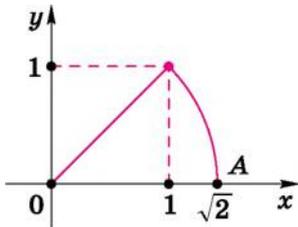


Рис. 197

В предыдущем параграфе мы узнали, что длину диагонали единичного квадрата, которая равна $\sqrt{2}$, нельзя выразить рациональным числом. Если отложить эту диагональ на координатной прямой (рис. 197), то получим точку A , координатой которой является иррациональное число $\sqrt{2}$.

На рисунке 198 также показано построение точек B и C координатной прямой с иррациональными координатами $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{13}$.

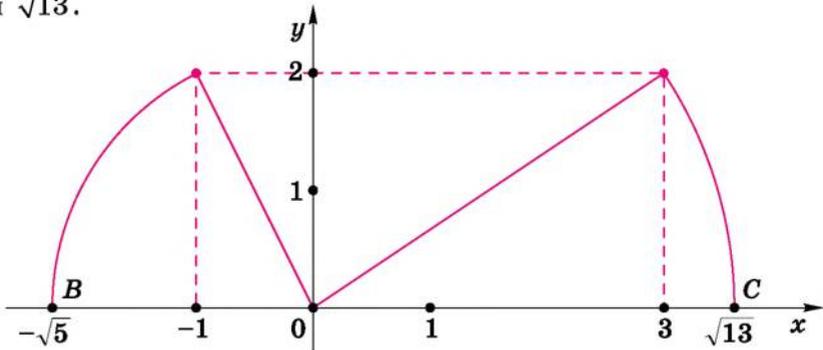


Рис. 198

Для каждого действительного числа a на координатной прямой найдется единственная точка X с координатой a , и наоборот, каждой точке X координатной прямой соответствует единственное действительное число a .

- ? 1. Из каких чисел состоит множество действительных чисел?
2. Как сравнивают действительные числа?

398. Определите, каким — рациональным или иррациональным — является число:

- | | | | |
|------------|----------------------|------------------|---------------------|
| а) 7; | г) $-\frac{4}{19}$; | ж) $\sqrt{36}$; | к) $\sqrt{1,96}$; |
| б) -12 ; | д) 0; | з) $\sqrt{44}$; | л) $-\sqrt{4,34}$; |
| в) 5,12; | е) π ; | и) $-\sqrt{4}$; | м) $-4,9(11)$. |

399. Подберите два последовательных целых числа, заключающих число:

- | | | |
|------------------|-------------------|--------------------|
| а) $\sqrt{29}$; | в) $\sqrt{111}$; | д) $\sqrt{0,9}$; |
| б) $\sqrt{50}$; | г) $\sqrt{3,6}$; | е) $\sqrt{16,6}$. |

400. Подберите два последовательных целых числа, заключающих число:

- а) $\sqrt{15}$; в) $\sqrt{200}$; д) $\sqrt{0,19}$;
б) $-\sqrt{91}$; г) $-\sqrt{24,8}$; е) $-\sqrt{56,9}$.

401. Методом последовательных приближений найдите значение $\sqrt{20}$ с точностью до:

- а) целых; б) десятых; в) сотых; г) тысячных.

402. Методом последовательных приближений найдите значение $\sqrt{5}$ с точностью до:

- а) целых; б) десятых; в) сотых; г) тысячных.

403. Найдите без калькулятора с точностью до целых значение квадратного корня из числа:

- а) 850; б) 2209; в) 16 657; г) 326 987.

404. Найдите без калькулятора с точностью до сотых значение квадратного корня из числа:

- а) 85; б) 229; в) 665; г) 2698.

405. С помощью калькулятора найдите значение:

- а) $\sqrt{37}$; в) $\sqrt{12060}$; д) $\sqrt{0,134989}$;
б) $\sqrt{143}$; г) $\sqrt{254,087}$; е) $-\sqrt{56,09989}$.

406. С помощью калькулятора найдите значение выражения \sqrt{y} , если значение переменной y равно:

- а) 290; в) 3,37; д) 0,0045321;
б) 1234; г) 0,6098; е) 0,000714221.

407. С помощью калькулятора найдите значение выражения $\sqrt{z+9}$, если значение переменной z равно:

- а) 273; в) 23,879; д) 0,0112233;
б) 8906; г) 0,09898; е) 0,00223741.

408. Найдите с точностью до сотых сторону квадрата, площадь которого равна:

- а) 39 см²; в) 44,8 дм²; д) 7,146 га;
б) 890 мм²; г) 7,09 м²; е) 0,1122 км².

409. Найдите с точностью до сотых значение выражения:

- а) $19 + \sqrt{97}$; г) $\sqrt{19^2 + 97^2}$; ж) $\sqrt{\sqrt{97} - \sqrt{19}}$;
б) $\sqrt{19} + \sqrt{97}$; д) $\sqrt{97^2 - 19^2}$; з) $\sqrt{\sqrt{97} + \sqrt{19}}$;
в) $\sqrt{19 + 97}$; е) $\sqrt{97 - \sqrt{19}}$; и) $\sqrt{5 + 3\sqrt{7}}$.

410. Найдите с точностью до сотых значение выражения:

- а) $11 + \sqrt{37}$; д) $\sqrt{193 - \sqrt{189}}$;
б) $10 - \sqrt{90}$; е) $\sqrt{97 \cdot 13}$;
в) $\sqrt{23} + \sqrt{38}$; ж) $\sqrt{\sqrt{97} \cdot 13}$;
г) $\sqrt{38} - \sqrt{2}$; з) $\sqrt{\sqrt{97} : \sqrt{13}}$.

411. Найдите с точностью до тысячных корень уравнения:

- а) $a^2 = 81$; д) $(e - 6)^2 = 13$;
б) $5b^2 = 39$; е) $(f + 4)^2 = 57$;
в) $0,7c^2 = \frac{7}{23}$; ж) $(7g - 2)^2 = 178$;
г) $1,9d^2 = \frac{4}{268}$; з) $(11f - 8)^2 = 597$.

412. Вычислите на калькуляторе с точностью до сотой:

- а) $\sqrt{876 + \sqrt{231}}$; ж) $\sqrt{34^2 + 237^2}$;
б) $\sqrt{908 - \sqrt{750}}$; з) $\sqrt{237^2 - 65^2}$;
в) $\sqrt{\sqrt{45091} - \sqrt{38}}$; и) $\sqrt{8 + \sqrt{2 + \sqrt{7}}}$;
г) $\sqrt{\sqrt{8093} - \sqrt{7813}}$; к) $\sqrt{\sqrt{5} + 9\sqrt{5}}$;
д) $\frac{\sqrt{127}}{19} + \frac{77}{\sqrt{199}}$; л) $\sqrt{\sqrt{8} + \sqrt{2} - 2}$;
е) $\frac{7}{\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{210}}{7}$; м) $\sqrt{7\sqrt{8} - \sqrt{19}}$.

413. Возведите в степень:

- а) $(ab)^2$; в) $\left(\frac{c}{a}\right)^3$; д) $(k^3)^6$; ж) $\left(\frac{2u^4}{3v^7}\right)^3$;
б) $(mnp)^4$; г) $\left(\frac{5x}{4y}\right)^3$; е) $(7l^6)^2$; з) $\left(\frac{4r^2s^9}{e^4g^5h^7}\right)^3$.

414. Квадратом некоторого выражения представьте выражение:

- а) a^2b^2 ; в) u^2v^6 ; д) $9e^6f^{20}$; ж) 144;
 б) $\frac{c^2}{d^2}$; г) $\frac{m^6}{n^4}$; е) $\frac{16x^{10}}{25y^{16}}$; з) 15 376.

415. Морская вода содержит по массе 3,2 % соли. Сколько пресной воды нужно добавить к 20 кг морской воды, чтобы концентрация соли уменьшилась до 1 %?

416. Найдите три числа, из которых первое составляет 80 % второго, второе относится к третьему как $0,5 : \frac{9}{20}$, а сумма первого и третьего чисел на 35 больше второго.

417. В 10-процентный раствор кислоты влили определенное количество 40-процентного раствора той же кислоты и получили 600 г 15-процентного раствора. Сколько граммов каждого раствора смешали?

418. Примесей в руде — 40 %, а в выплавленном из нее металле — 4 %. Сколько металла получится из 480 т руды?

419. Начертите отрезок AB . Покажите на нем все точки K , которые удовлетворяют условию:

- а) $\frac{AK}{BK} > 1$; в) $\frac{AK}{BK} \leq \frac{1}{3}$; д) $2 < \frac{AK}{BK} \leq 3$;
 б) $\frac{AK}{BK} \geq 2$; г) $1 < \frac{AK}{BK} < 3$; е) $\frac{1}{3} \leq \frac{AK}{BK} \leq 3$.

420. На прямой отметьте две точки A и B . Покажите на ней все точки K , которые удовлетворяют условию:

- а) $\frac{AK}{BK} > 1$; в) $\frac{AK}{BK} \leq \frac{1}{3}$; д) $2 < \frac{AK}{BK} \leq 3$;
 б) $\frac{AK}{BK} \geq 2$; г) $1 < \frac{AK}{BK} < 3$; е) $\frac{1}{3} \leq \frac{AK}{BK} \leq 3$.

421. Прямая, перпендикулярная биссектрисе угла C , пересекает его стороны в точках P и Q . Докажите, что треугольник CPQ равнобедренный.

422. Основание равнобедренного треугольника на 3 больше боковой стороны и на 4 меньше удвоенной боковой стороны. Найдите стороны треугольника.

423. В четырехугольнике $KLMN$ стороны NK и NM равны, а диагонали KM и LN перпендикулярны (рис. 199). Докажите, что:

- а) две другие стороны равны друг другу;
 б) четырехугольник $KLMN$ имеет пару равных углов.

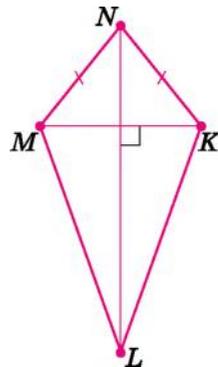


Рис. 199

424. Рациональной дробью представьте выражение:

а) $\left(\frac{p+q}{5p} - p - q\right) : \frac{p+q}{7} - \frac{7}{5p}$;

б) $\left(\frac{b}{b+1} - 1\right) \cdot \frac{1-a^2}{b-b^2} \cdot \frac{1-b^2}{1-a}$;

в) $\frac{1}{1+2x+3y} - \left(1 + \frac{1+6y}{9y^2-4x^2}\right) : \frac{9y^2+6y-4x^2+1}{3y-2x}$;

г) $\left(\frac{1}{m-2n} + \frac{2n}{4n^2-m^2}\right) : \left(\frac{4n^2}{m^2+4n^2+4mn} - \frac{2n}{2n+m}\right)$.

425. Упростите выражение:

а) $2^{-6} : 2^{-4}$;

д) $5^{-1} \cdot 5^{-4}$;

и) $a^{-3}a^5a^{-7}$;

н) $e^{-k}e^{2k}e^{-l}$;

б) $3^3 : 3^{-5}$;

е) $5^2 \cdot 5^{-3}$;

к) $b^3b^{-4}b^{-1}$;

о) $f^{-2m}f^{-2n}f^{3n}$;

в) $4^{-3} : 4^{-2}$;

ж) $5^{-4} \cdot 5^2$;

л) $c^{-2}c^{-3}c$;

п) $g^{3u}g^{2u}g^{-u}$;

г) $4^{-3} : 4^2$;

з) $5^{-1} \cdot 5$;

м) $dd^{-3}d^2$;

р) $h^{5v}h^{2v}h^{-9v}$.

* * *

426. (Из коллекции профессора Брайена.)

— Проиграв 100 фунтов, я имею моральное право усложнить игру. Из трех карточек только на одной написано «Получите», а на двух остальных «Заплатите», — сказал профессор и выложил на стол карточки, показанные на рисунке 200.

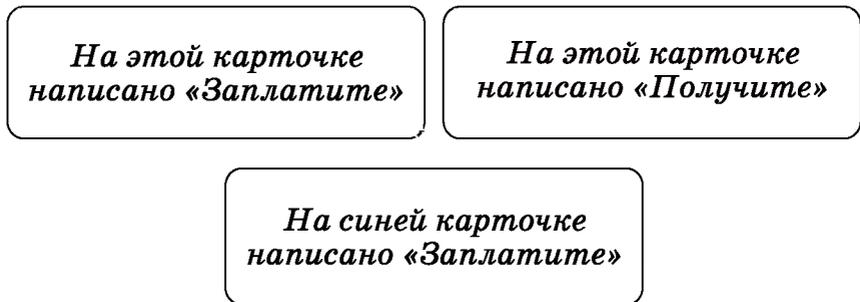


Рис. 200

— И это все?

— Если это вас подбодрит, то учтите, что по крайней мере одна из подсказок истинная.

Какую карточку нужно перевернуть, чтобы выиграть 10 фунтов?

427. Найдите все такие четырехзначные числа n , что суммы цифр числа n и числа $n + 1$ кратны 17.

428. В круге отметили точку M . Как разрезать этот круг на две такие части, что из них можно сложить новый круг, для которого точка M является центром?

13. Свойства арифметического квадратного корня

А. Рассмотрим свойства квадратного корня, позволяющие проводить преобразования квадратных корней.

Теорема 1. $\sqrt{a^2} = |a|$ при любом значении a .

Доказательство. Пусть $a \geq 0$. Учитывая определение квадратного корня, получим:

$$\sqrt{a^2} = a.$$

Пусть $a < 0$. Тогда $-a > 0$. Поскольку $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2}$, то, учитывая определение квадратного корня, получим:

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a.$$

Таким образом,

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Теперь, учитывая определение модуля числа, можем записать:

$$\sqrt{a^2} = |a| \text{ (рис. 201).}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|,$$

a — любое число

Рис. 201

Теорема 2. Пусть a и b — неотрицательные числа. Тогда если $a > b$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, и наоборот, если $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, то $a > b$.

Доказательство. Пусть $a \geq 0$ и $b \geq 0$.

Пусть $a > b$. Допустим, что $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$. Возведя обе части неравенства в квадрат, получим $a \leq b$. Но это противоречит условию $a > b$.

Поскольку по условию $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то выражения \sqrt{a} и \sqrt{b} имеют значения. Пусть $\sqrt{a} > \sqrt{b}$. Тогда, учитывая, что $\sqrt{a} > 0$ и $\sqrt{b} > 0$, получим $(\sqrt{a})^2 > (\sqrt{b})^2$. Поскольку по определению арифметического квадратного корня $(\sqrt{a})^2 = a$ и $(\sqrt{b})^2 = b$, то $a > b$ (рис. 202).

Пусть: $a \geq 0, b \geq 0$.

если $a > b$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$;

Тогда:

если $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, то $a > b$.

Рис. 202

Б. Теорема 3. Квадратный корень из произведения отрицательных множителей равен произведению квадратных корней из этих множителей.

Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Доказательство. Пусть $a \geq 0$ и $b \geq 0$. В соответствии с определением арифметического квадратного корня нужно доказать, что:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0 \text{ и } (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = ab.$$

Поскольку по определению арифметического квадратного корня $\sqrt{a} \geq 0$ и $\sqrt{b} \geq 0$, то и $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$.

Учитывая свойство степени произведения, получим $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2$. Поскольку по определению арифметического квадратного корня $(\sqrt{a})^2 = a$ и $(\sqrt{b})^2 = b$, то $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = ab$ (рис. 203).

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}; \\ \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} &= \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

a и b — неотрицательные числа.

Рис. 203

Теорему 3 можно распространить и на случай трех и большего числа неотрицательных множителей под знаком корня.

Теорема 4. Квадратный корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен квадратному корню из числителя, деленному на квадратный корень из знаменателя.

Если $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Доказательство. Пусть $a \geq 0$ и $b > 0$. Тогда оба выражения $\sqrt{\frac{a}{b}}$ и $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ имеют значения. В соответствии с определением арифметического квадратного корня нужно доказать, что:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0 \text{ и } \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}. \end{aligned}$$

*a — неотрицательное число,
b — положительное число.*

Рис. 204

Поскольку $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{a} \geq 0$ и $\sqrt{b} > 0$. Поэтому $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0$.

Используя свойство степени дроби, получим:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b} \text{ (рис. 204).}$$

Пример 1. Упростим выражение $\sqrt{x^{12}}$.

Поскольку $x^{12} = (x^6)^2$, то

$$\sqrt{x^{12}} = \sqrt{(x^6)^2} = |x^6|.$$

Учитывая, что $x^6 \geq 0$ при любом x , получим $|x^6| = x^6$.

Значит,

$$\sqrt{x^{12}} = x^6.$$

Пример 2. Упростим выражение $\sqrt{a^{18}}$, учитывая, что $a < 0$.

Поскольку $a^{18} = (a^9)^2$, то можем записать:

$$\sqrt{a^{18}} = \sqrt{(a^9)^2} = |a^9|.$$

Но $a < 0$, тогда $a^9 < 0$. Поэтому $|a^9| = -a^9$. Значит, при $a < 0$

$$\sqrt{a^{18}} = -a^9.$$

Пример 3. Вычислим $\sqrt{6\,350\,400}$.

Сначала разложим подкоренное число 6 350 400 на простые множители:

$$6\,350\,400 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2.$$

Значит,

$$\begin{aligned}\sqrt{6\,350\,400} &= \sqrt{2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = \sqrt{2^6} \cdot \sqrt{3^4} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7^2} = \\ &= \sqrt{(2^3)^2} \cdot \sqrt{(3^2)^2} \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 35 = 8 \cdot 9 \cdot 35 = 2520.\end{aligned}$$

Пример 4. Найдем значение выражения $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$.

Перепишем формулу, доказанную в теореме 3, в виде

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$

Значит,

$$\sqrt{7} \cdot \sqrt{28} = \sqrt{7 \cdot 28} = \sqrt{7 \cdot 7 \cdot 4} = 7 \cdot 2 = 14.$$

Пример 5. Найдем значение выражения $\frac{\sqrt{2000}}{\sqrt{5}}$.

Формулу, доказанную в теореме 4, можно записать так:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Поэтому

$$\frac{\sqrt{2000}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2000}{5}} = \sqrt{4 \cdot 100} = 2 \cdot 10 = 20.$$



1. Сформулируйте теорему об извлечении арифметического квадратного корня из квадрата выражения.

2. Сформулируйте теорему, связывающую неравенства $a > b$ и $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

3. Сформулируйте теорему об извлечении арифметического квадратного корня из произведения.

4. Сформулируйте теорему об извлечении арифметического квадратного корня из дроби.

429. Истинно ли равенство:

- а) $\sqrt{7^2} = 7$; в) $\sqrt{(-7)^2} = 7$;
б) $\sqrt{(-7)^2} = -7$; г) $\sqrt{(-7)^2} = |-7|$?

430. Найдите значение выражения $\sqrt{t^2}$, если t равно:

- а) 3; б) 12; в) 0; г) -3; д) -12.

431. Вычислите:

- а) $\sqrt{(1,9)^2}$; ж) $\sqrt{(-0,029)^2}$; н) $3\sqrt{(-29)^2}$;
б) $\sqrt{(9,29)^2}$; з) $\sqrt{1025^2}$; о) $5\sqrt{67^2}$;
в) $\sqrt{(-159)^2}$; и) $\sqrt{(-10,2)^2}$; п) $0,3\sqrt{(-3,1)^2}$;
г) $\sqrt{(-13,2)^2}$; к) $\sqrt{(-4)^2}$; р) $19\sqrt{-67^2}$;
д) $\sqrt{(0,2)^2}$; л) $\sqrt{-4^2}$; с) $-4\sqrt{(-67)^2}$;
е) $\sqrt{92^2}$; м) $\sqrt{(-10\ 298)^2}$; т) $-2\sqrt{(-3)\cdot(-9)^3}$.

432. Вычислите:

- а) $\sqrt{2^{10}}$; в) $\sqrt{5^6}$; д) $\sqrt{(-11)^4}$; ж) $\sqrt{(-3)^{12}}$;
б) $\sqrt{3^6}$; г) $\sqrt{7^4}$; е) $\sqrt{(-13)^6}$; з) $\sqrt{(-2)^{14}}$.

433. Упростите:

- а) $\sqrt{a^8}$; б) $\sqrt{b^{12}}$; в) $\sqrt{c^{10}}$, если $c > 0$; г) $\sqrt{d^{14}}$.

434. Найдите значение выражения $\sqrt{p^2 - 4p + 4}$, если p равно:

- а) 5; б) 2; в) 0; г) -2; д) -5.

435. Сравните числа:

- а) 2 и $\sqrt{5}$; д) $\sqrt{32,49}$ и 5,7;
б) 12 и $\sqrt{143}$; е) $\sqrt{179}$ и $\sqrt{187}$;
в) $\sqrt{2,88}$ и 1,7; ж) $\sqrt{2,8}$ и $\sqrt{2,6}$;
г) $\sqrt{8,43}$ и 2,9; з) $\sqrt{12,34}$ и $\sqrt{13,24}$.

436. Докажите, что:

- а) $4 < \sqrt{20} < 5$; г) $15,5 < \sqrt{243} < 15,6$;
б) $3,3 < \sqrt{11} < 3,4$; д) $6,85 < \sqrt{47} < 6,86$;
в) $33 < \sqrt{1111} < 34$; е) $20,22 < \sqrt{409} < 20,23$.

437. Найдите два последовательных целых числа, между которыми заключено число:

- а) $\sqrt{28}$; в) $\sqrt{0,7}$; д) $-\sqrt{1000}$;
б) $\sqrt{159}$; г) $-\sqrt{44}$; е) $-\sqrt{0,17}$.

438. Найдите значение выражения:

- а) $\sqrt{100 \cdot 25}$; д) $\sqrt{169 \cdot 1,21}$; и) $\sqrt{2,89 \cdot 3,24}$;
б) $\sqrt{81 \cdot 36}$; е) $\sqrt{1,69 \cdot 144}$; к) $\sqrt{(-16) \cdot (-36)}$;
в) $\sqrt{64 \cdot 121}$; ж) $\sqrt{0,01 \cdot 256}$; л) $\sqrt{(-16) \cdot (-9)}$;
г) $\sqrt{9 \cdot 144}$; з) $\sqrt{0,09 \cdot 2,89}$; м) $\sqrt{(-0,25) \cdot (-81)}$.

439. Вычислите:

- а) $\sqrt{\frac{16}{49}}$; г) $\sqrt{\frac{225}{256}}$; ж) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$; к) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$;
б) $\sqrt{\frac{81}{64}}$; д) $\sqrt{\frac{144}{169}}$; з) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; л) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$;
в) $\sqrt{\frac{144}{121}}$; е) $\sqrt{\frac{361}{400}}$; и) $\sqrt{5\frac{19}{25}}$; м) $\sqrt{11\frac{1}{9}}$.

440. Вычислите:

- а) $\sqrt{36 \cdot 49}$; д) $\sqrt{1,69 \cdot 3,61}$; и) $\sqrt{8\frac{8}{49}}$;
б) $\sqrt{64 \cdot 121}$; е) $\sqrt{0,01 \cdot 22\,500}$; к) $\sqrt{24\frac{1}{2} \cdot 8}$;
в) $\sqrt{100 \cdot 1,96}$; ж) $\sqrt{12\frac{1}{4}}$; л) $\sqrt{1\frac{22}{27} \cdot 243}$;
г) $\sqrt{0,09 \cdot 2,56}$; з) $\sqrt{11\frac{14}{25}}$; м) $\sqrt{4\frac{29}{125} \cdot 5}$.

441. Найдите значение выражения:

- а) $\sqrt{36 \cdot 81 \cdot 0,49}$; е) $\sqrt{\frac{64}{81} \cdot \frac{121}{144} \cdot \frac{196}{225}}$;
б) $\sqrt{1,21 \cdot 2,25 \cdot 196}$; ж) $\sqrt{1 \frac{11}{25} \cdot 5 \frac{79}{81} \cdot 6 \frac{80}{49}}$;
в) $\sqrt{1,44 \cdot 0,04 \cdot 0,0009}$; з) $\sqrt{1 \frac{17}{64} \cdot 3 \frac{13}{36} \cdot 2 \frac{14}{121}}$;
г) $\sqrt{\frac{16}{225} \cdot \frac{81}{121} \cdot \frac{196}{289}}$; и) $\sqrt{2 \frac{46}{49} \cdot 1 \frac{40}{81} \cdot 1 \frac{185}{256}}$;
д) $\sqrt{\frac{25}{144} \cdot \frac{49}{256} \cdot \frac{289}{441}}$; к) $\sqrt{2 \frac{5}{9} \cdot 5 \frac{2}{23} \cdot 9 \frac{4}{13}}$.

442. Найдите значение выражения:

- а) $\sqrt{250\,000 \cdot 0,0081 \cdot 4}$; г) $\sqrt{1 \frac{7}{9} \cdot 1 \frac{17}{64} \cdot \frac{4}{25}}$;
б) $\sqrt{0,0009 \cdot 1600 \cdot 0,04}$; д) $\sqrt{\frac{121}{144} \cdot \frac{49}{484} \cdot 2 \frac{1}{4}}$;
в) $\sqrt{0,0196 \cdot 12\,100 \cdot 0,000001}$; е) $\sqrt{\frac{64}{441} \cdot 1 \frac{13}{36} \cdot 5 \frac{1}{16}}$.

443. Вычислите:

- а) $\sqrt{490 \cdot 90}$; д) $\sqrt{50 \cdot 8}$;
б) $\sqrt{10 \cdot 810}$; е) $\sqrt{3,6 \cdot 14,4}$;
в) $\sqrt{72 \cdot 50}$; ж) $\sqrt{160 \cdot 4,9}$;
г) $\sqrt{98 \cdot 18}$; з) $\sqrt{36,1 \cdot 1,6}$.

444. Найдите значение выражения:

- а) $\sqrt{25^2 - 24^2}$; д) $\sqrt{35^2 + 12^2}$;
б) $\sqrt{24^2 + 7^2}$; е) $\sqrt{61^2 - 60^2}$;
в) $\sqrt{41^2 - 40^2}$; ж) $\sqrt{28^2 + 45^2}$;
г) $\sqrt{15^2 + 8^2}$; з) $\sqrt{85^2 - 84^2}$.

445. Используя приближенное равенство $\sqrt{74} \approx 8,7$, найдите приближенное значение выражения:

- а) $\sqrt{7400}$; б) $\sqrt{740\,000}$; в) $\sqrt{0,74}$; г) $\sqrt{0,0074}$.

446. Найдите значение выражения:

- а) $\sqrt{78\,400}$; д) $\sqrt{15,21}$;
б) $\sqrt{324\,900}$; е) $\sqrt{0,002116}$;
в) $\sqrt{144\,000\,000}$; ж) $\sqrt{0,00005929}$;
г) $\sqrt{68\,890\,000}$; з) $\sqrt{0,0000007056}$.

447. Разложив на множители подкоренное выражение, вычислите:

- а) $\sqrt{11\,664}$; д) $\sqrt{176\,400}$;
б) $\sqrt{5184}$; е) $\sqrt{3\,705\,625}$;
в) $\sqrt{15\,625}$; ж) $\sqrt{49\,098\,049}$;
г) $\sqrt{68\,121}$; з) $\sqrt{17\,935\,225}$.

448. Вычислите:

- а) $\sqrt{59\,049}$; д) $\sqrt{3\,455\,881}$;
б) $\sqrt{3\,515\,625}$; е) $\sqrt{2\,393\,209}$;
в) $\sqrt{9\,529\,569}$; ж) $\sqrt{258\,984\,649}$;
г) $\sqrt{35\,153\,041}$; з) $\sqrt{86\,806\,489}$.

449. Вычислите произведение:

- а) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$; г) $\sqrt{28} \cdot \sqrt{7}$; ж) $\sqrt{1,3} \cdot \sqrt{520}$;
б) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; д) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{44}$; з) $\sqrt{2,4} \cdot \sqrt{1\frac{2}{3}}$;
в) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$; е) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{63}$; и) $\sqrt{17} \cdot \sqrt{\frac{9}{68}}$.

450. Вычислите частное:

- а) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; д) $\frac{\sqrt{117}}{\sqrt{325}}$; ж) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{45}}$;
б) $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{1700}}$; г) $\frac{\sqrt{76}}{\sqrt{171}}$; е) $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{175}}$; з) $\frac{\sqrt{5,2}}{\sqrt{32,5}}$.

451. Найдите значение выражения:

- а) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{90}$; д) $\sqrt{130} \cdot \sqrt{5,2}$;
б) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{75}$; е) $\sqrt{\frac{12}{5}} \cdot \sqrt{0,6}$;
в) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{5}$; ж) $\sqrt{\frac{9}{2}} \cdot \sqrt{0,5}$;
г) $\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{\frac{45}{32}}$; з) $\sqrt{1,25} \cdot \sqrt{0}$.

452. Вычислите:

- а) $(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2$; г) $(\sqrt{20} - \sqrt{125})^2$;
 б) $(\sqrt{5} - \sqrt{125})^2$; д) $(\sqrt{7} + \sqrt{8})(\sqrt{7} - \sqrt{8})$;
 в) $(\sqrt{3} + \sqrt{27})^2$; е) $(2\sqrt{7} + 7\sqrt{2})(2\sqrt{7} - 7\sqrt{2})$.

453. Вычислите:

- а) $\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{\frac{1}{9}}$; д) $\sqrt{\frac{49 \cdot 64}{400 \cdot 196}}$;
 б) $4\sqrt{\frac{1}{9}} - 3\sqrt{\frac{1}{16}}$; е) $\sqrt{5\frac{4}{9} \cdot 11\frac{14}{25} \cdot \frac{36}{49}}$;
 в) $\sqrt{\frac{49}{64}} - \sqrt{\frac{25}{144}}$; ж) $\sqrt{\frac{7}{32} \cdot 1\frac{1}{6} \cdot \frac{64}{147}}$;
 г) $\sqrt{\frac{16}{81}} + \sqrt{\frac{196}{225}}$; з) $\sqrt{2\frac{7}{81} \cdot 2\frac{14}{121} \cdot 17\frac{1}{64}}$.

454. Площадь первого квадрата равна 48 см^2 , второго — 12 см^2 . Во сколько раз сторона первого квадрата больше стороны второго?

455. Одна сторона треугольника равна 16 см , а проведенная к ней высота — 12 см . Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади треугольника.

456. Измерения прямоугольника равны 7 и 24 . Найдите его диагональ.

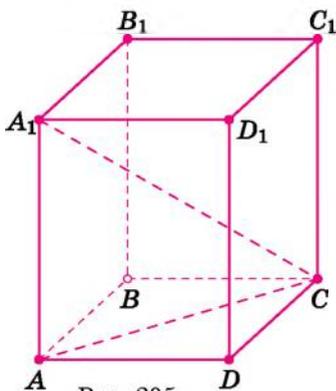


Рис. 205

457. Сторона квадрата равна 5 см . С точностью до миллиметра найдите его диагональ.

458. Отрезок A_1C на рисунке 205 является диагональю прямоугольного параллелепипеда. Учитывая, что угол A_1AC прямой, найдите эту диагональ, если:

- а) $AB = 3$; $AD = 5$; $AA_1 = \sqrt{15}$;
 б) $AB = 7$; $AD = 10$; $AA_1 = \sqrt{76}$;
 в) $AB = 11$; $AD = 15$; $AA_1 = \sqrt{95}$;
 г) $AB = 5$; $AD = 6$; $AA_1 = 2\sqrt{5}$.

459. Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат со стороной a , высота параллелепипеда равна h . Выразите переменную a через переменные V и h . Найдите a , если:

- а) $V = 810, h = 10;$ в) $V = 1089, h = 9;$
 б) $V = 175, h = 7;$ г) $V = 2925, h = 13.$

460. На первом элеваторе было зерна в 2 раза больше, чем на втором. После того как из первого элеватора вывезли 750 т зерна, а на второй привезли 350 т, зерна на обоих элеваторах стала поровну. Сколько зерна было на каждом элеваторе сначала?

461. Найдите сумму трех чисел, учитывая, что третье число относится к первому как $4,5 : \frac{15}{4}$ и составляет 40 % второго, а сумма первого и второго чисел равна 240.

462. Сумма двух чисел равна 4980. Найдите эти числа, если 6,5 % одного из них равно 8,5 % другого.

463. Из 22 кг свежих грибов получается 2,5 кг сушеных. Определите влажность свежих грибов, если влажность сушеных составляет 12 %.

464. Докажите, что:

- а) если $x > 2$, то $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} > \frac{1}{2};$
 б) если $a > 12$, то $\frac{a+3}{3} + \frac{a+2}{2} < a.$

* * *

465. За лето Лена, Оля, Галя и Клава вырастили по одинаковому количеству цыплят. При этом у Лены, Оли и Гали, в отличие от Клавы, были и курочки, и петушки. Лена вырастила столько же петушков, сколько Оля курочек, а петушки, выращенные Галей, составляют третью часть всех петушков, выращенных детьми. Кого больше вырастили дети: курочек или петушков?

466. Две вершины квадрата имеют координаты (0; 0) и (6; 4). Найдите координаты двух остальных его вершин.

467. Фирма выпускает погремушки в виде кольца с надетыми на него 3 синими и 7 белыми шариками (рис. 206). Сколько различных погремушек может быть выпущено? А если использовать 4 синих и 6 белых шариков?

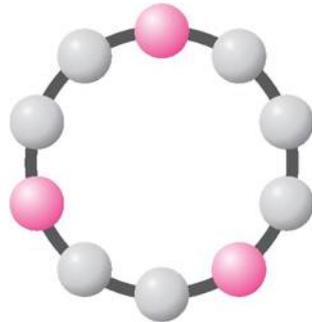


Рис. 206

14. Выражения с квадратными корнями

А. Равенства

$$\sqrt{a^2} = |a|,$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

являются тождествами, поскольку они истинны при любых значениях переменных из областей определения соответствующих формул. Равенство $\sqrt{a^2} = |a|$ истинно при любом значении переменной a . Равенство $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ истинно для любой пары (a, b) неотрицательных действительных чисел. Равенство $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ истинно для любой пары (a, b) действительных чисел, первая компонента a которой неотрицательна, а вторая b — положительна.

Эти формулы-равенства позволяют проводить тождественные преобразования выражений с квадратными корнями.

Рассмотрим выражение $\sqrt{a^2b}$. Имеем:

$$\sqrt{a^2b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = |a| \cdot \sqrt{b}.$$

Преобразование $\sqrt{a^2b} = |a| \cdot \sqrt{b}$ называют **вынесением множителя из-под знака корня**, а преобразование $|a| \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$ — **внесением множителя под знак корня**.

Пример 1. Сравним значения выражений $\sqrt{27}$ и $2\sqrt{3}$. Учитывая, что $27 = 9 \cdot 3$, получим:

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

Поскольку $3 > 2$, то $3\sqrt{3} > 2\sqrt{3}$ и $\sqrt{27} > 2\sqrt{3}$.

Пример 2. Сравним выражения $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$.

Внеся множители 2 и 3 под знак корня, получим:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12} \quad \text{и} \quad 3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}.$$

Поскольку $12 < 18$, то, учитывая теорему 2, получим: $\sqrt{12} < \sqrt{18}$. Поэтому и $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

Пример 3. Внесем множитель под знак корня в выражении $-7\sqrt{b}$.

Отрицательный множитель -7 нельзя представить арифметическим квадратным корнем, поэтому учтем, что $-7 = -1 \cdot 7$. Значит,

$$-7\sqrt{b} = -1 \cdot 7 \cdot \sqrt{b} = -1 \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{49b}.$$

Пример 4. Упростим выражение $a\sqrt{12} - a\sqrt{147} + a\sqrt{75}$.

Разложим числа 12, 147 и 75 на множители и затем вынесем соответствующие множители из-под знака корня:

$$12 = 2^2 \cdot 3, \quad 147 = 3 \cdot 7^2, \quad 75 = 3 \cdot 5^2;$$

$$\begin{aligned} a\sqrt{12} - a\sqrt{147} + a\sqrt{75} &= a\sqrt{2^2 \cdot 3} - a\sqrt{3 \cdot 7^2} + a\sqrt{3 \cdot 5^2} = \\ &= 2a\sqrt{3} - 7a\sqrt{3} + 5a\sqrt{3} = a\sqrt{3}(2 - 7 + 5) = a\sqrt{3} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Пример 5. Упростим выражение-произведение

$$(3\sqrt{5} - 5\sqrt{3}) \cdot (4\sqrt{5} + 6\sqrt{3}).$$

Сначала раскроем скобки, а потом приведем подобные:

$$\begin{aligned} &(3\sqrt{5} - 5\sqrt{3})(4\sqrt{5} + 6\sqrt{3}) = \\ &= 12(\sqrt{5})^2 + 18\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} - 20\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} - 30(\sqrt{3})^2 = \\ &= 60 + 18\sqrt{15} - 20\sqrt{15} - 90 = -30 - 2\sqrt{15}. \end{aligned}$$

Б. Пример 6. Выражение $\frac{x}{\sqrt{3}}$ преобразуем так, чтобы в знаменателе не было квадратного корня.

Умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{x}{\sqrt{3}}$ на $\sqrt{3}$, получим:

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

Мы заменили выражение $\frac{x}{\sqrt{3}}$ тождественно равным выражением $\frac{x\sqrt{3}}{3}$, которое в знаменателе не содержит корня. Подобное преобразование выражения называют **избавлением от иррациональности в знаменателе**.

Пример 7. Сократим дробь $\frac{t^2 - 5}{t + \sqrt{5}}$.

Учитывая, что $5 = (\sqrt{5})^2$, числитель $t^2 - 5$ можно разложить на множители:

$$t^2 - 5 = t^2 - (\sqrt{5})^2 = (t - \sqrt{5})(t + \sqrt{5}).$$

Поэтому

$$\frac{t^2 - 5}{t + \sqrt{5}} = \frac{(t - \sqrt{5})(t + \sqrt{5})}{t + \sqrt{5}} = t - \sqrt{5}.$$

Пример 8. Упростим выражение $\frac{6 - 4\sqrt{7}}{\sqrt{28} - 2}$.

Будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{6 - 4\sqrt{7}}{\sqrt{28} - 2} &= \frac{6 - 4\sqrt{7}}{2\sqrt{7} - 2} = \frac{2(3 - 2\sqrt{7})}{2(\sqrt{7} - 1)} = \frac{3 - 2\sqrt{7}}{\sqrt{7} - 1} = \frac{(3 - 2\sqrt{7})(\sqrt{7} + 1)}{(\sqrt{7} - 1)(\sqrt{7} + 1)} = \\ &= \frac{3\sqrt{7} + 3 - 2(\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2 - 1} = \frac{3\sqrt{7} + 3 - 2 \cdot 7 - 2\sqrt{7}}{7 - 1} = \frac{\sqrt{7} - 11}{6}. \end{aligned}$$

Пример 9. Докажем тождество

$$\left(a^{-1} - \frac{2}{\sqrt{a}} + 1\right) : \frac{\sqrt{a} - \frac{1}{a\sqrt{a}}}{\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}} = \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} a^{-1} - \frac{2}{\sqrt{a}} + 1 &= \frac{1}{a} - 2\frac{1}{\sqrt{a}} + 1 = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 - 2\frac{1}{\sqrt{a}} + 1 = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - 1\right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{\sqrt{a}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{a}; \\ \frac{\sqrt{a} - \frac{1}{a\sqrt{a}}}{\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}} &= \frac{\frac{a\sqrt{a}\sqrt{a} - 1}{a\sqrt{a}}}{\frac{\sqrt{a}\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}}} = \frac{\frac{a^2 - 1}{a\sqrt{a}}}{\frac{a + 1}{\sqrt{a}}} = \frac{(a^2 - 1)\sqrt{a}}{(a + 1)a\sqrt{a}} = \frac{a - 1}{a}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left(a^{-1} - \frac{2}{\sqrt{a}} + 1\right) : \frac{\sqrt{a} - \frac{1}{a\sqrt{a}}}{\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}} &= \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{a} : \frac{a - 1}{a} = \\ &= \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{a} \cdot \frac{a}{a - 1} = \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{(\sqrt{a})^2 - 1^2} = \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} = \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1}. \end{aligned}$$



1. При каких значениях переменной a истинна формула $\sqrt{a^2} = |a|$? Прочитайте ее словами.

2. Для каких пар $(a; b)$ истинна формула $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$? Прочитайте ее словами.

3. Для каких пар $(a; b)$ истинна формула $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$? Прочитайте ее словами.

4. Какое преобразование выражения называют вынесением множителя из-под знака корня?

5. Какое преобразование выражения называют внесением множителя под знак корня?

6. Какое преобразование выражения называют избавлением от иррациональности в знаменателе?

468. Вынесите множитель из-под знака корня:

- а) $\sqrt{8}$; е) $\sqrt{99}$;
б) $\sqrt{40}$; ж) $\sqrt{125}$;
в) $\sqrt{45}$; з) $\sqrt{117}$;
г) $\sqrt{68}$; и) $\sqrt{700}$;
д) $\sqrt{27}$; к) $\sqrt{261}$.

469. Вынесите множитель из-под знака корня и упростите выражение:

- а) $\frac{1}{3}\sqrt{27}$; е) $\frac{1}{9}\sqrt{162}$;
б) $\frac{2}{8}\sqrt{45}$; ж) $0,5\sqrt{12}$;
в) $\frac{3}{4}\sqrt{80}$; з) $0,2\sqrt{50}$;
г) $\frac{1}{8}\sqrt{128}$; и) $0,1\sqrt{1000}$;
д) $\frac{1}{7}\sqrt{147}$; к) $0,04\sqrt{1250}$.

470. Внесите множитель под знак корня:

- а) $2\sqrt{5}$; г) $7\sqrt{c}$; ж) $10\sqrt{3}$; к) $11\sqrt{10k}$;
б) $3\sqrt{a}$; д) $7\sqrt{10}$; з) $6\sqrt{5z}$; л) $5\sqrt{21}$;
в) $3\sqrt{5}$; е) $2\sqrt{3x}$; и) $7\sqrt{11}$; м) $14\sqrt{3}$.

471. Внесите положительный множитель под знак корня:

- а) $-2\sqrt{2}$; е) $-\frac{1}{3}\sqrt{6}$;
б) $-4\sqrt{7}$; ж) $3\sqrt{7c}$;
в) $-0,2\sqrt{5}$; з) $-3\sqrt{2d}$;
г) $-7\sqrt{0,12}$; и) $7\sqrt{0,1g}$;
д) $-1,5\sqrt{8}$; к) $-7\sqrt{0,2h}$.

472. Представьте выражение арифметическим квадратным корнем или выражением, ему противоположным:

- а) $3\sqrt{\frac{2}{3}}$; в) $\frac{1}{8}\sqrt{18}$; д) $-10\sqrt{0,01}$; ж) $-\frac{1}{2}\sqrt{2a}$;
б) $-5\sqrt{y}$; г) $6\sqrt{4b}$; е) $0,3\sqrt{2t}$; з) $-0,2\sqrt{5s}$.

473. Сравните значения выражений:

- а) $5\sqrt{4}$ и $\sqrt{96}$; в) $3\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}$; д) $7\sqrt{2}$ и 100 ;
б) $4\sqrt{5}$ и 3^2 ; г) $3\sqrt{5}$ и $2\sqrt{10}$; е) $6\sqrt{3}$ и $\sqrt{110}$.

474. Сравните значения выражений:

- а) $\frac{1}{7}\sqrt{294}$ и $\frac{1}{3}\sqrt{63}$; г) $\frac{2}{3}\sqrt{15}$ и $\frac{1}{3}\sqrt{80}$;
б) $\frac{1}{4}\sqrt{112}$ и $\frac{1}{5}\sqrt{175}$; д) $\frac{2}{3}\sqrt{27}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{128}$;
в) $\sqrt{15}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{60}$; е) $7\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $4\sqrt{2}$.

475. Запишите по возрастанию числа:

- а) $3\sqrt{3}$; $\sqrt{29}$; $2\sqrt{7}$; $4\sqrt{2}$; в) $5\sqrt{6}$; $2\sqrt{37}$; $2\sqrt{39}$; $4\sqrt{10}$;
б) $\sqrt{70}$; $6\sqrt{2}$; $3\sqrt{6}$; $2\sqrt{14}$; г) $6\sqrt{3}$; $2\sqrt{26}$; $5\sqrt{5}$; $\sqrt{107}$.

476. Вынесите множитель из-под знака корня:

- а) $\sqrt{5a^2}$, где $a \geq 0$; е) $\sqrt{l^5}$;
б) $\sqrt{8b^2}$, где $b < 0$; ж) $\sqrt{25x^7}$;
в) $\sqrt{8c^4}$; з) $\sqrt{36y^9}$;
г) $\sqrt{10d^8}$; и) $\sqrt{\frac{5z^{11}}{4}}$;
д) $\sqrt{k^3}$; к) $\sqrt{\frac{27t^3}{49}}$.

477. Вынесите множитель из-под знака корня:

- а) $\sqrt{125m^3}$; д) $\sqrt{108a^2}$, где $a \leq 0$;
б) $\sqrt{200n^{11}}$; е) $\sqrt{50b^{14}}$, где $b > 0$;
в) $\sqrt{24x^6}$, где $x < 0$; ж) $\sqrt{72t^{16}}$;
г) $\sqrt{45y^{10}}$, где $y \geq 0$; з) $\sqrt{48u^{20}}$.

478. Упростите выражение:

- а) $3\sqrt{a} + 4\sqrt{a} - \sqrt{b}$; ж) $3\sqrt{5v} + 2\sqrt{20v} - 4\sqrt{45v}$;
б) $3\sqrt{c} - 2\sqrt{d} - 4\sqrt{c}$; з) $\sqrt{75} - \sqrt{48} - \sqrt{243}$;
в) $\sqrt{4r} + \sqrt{9r} - \sqrt{25r}$; и) $6\sqrt{8} + 2\sqrt{98} - 3\sqrt{50}$;
г) $\sqrt{16s} - \sqrt{36s} + \sqrt{9s}$; к) $\sqrt{288} - \sqrt{200} - \sqrt{128}$;
д) $\sqrt{3t} - 2\sqrt{12t} - 3\sqrt{27t}$; л) $\sqrt{28} + \sqrt{63} - \sqrt{175}$;
е) $\sqrt{8u} - 3\sqrt{50u} + 5\sqrt{18u}$; м) $-2\sqrt{24} - 3\sqrt{72} - \sqrt{396}$.

479. Выполните действия:

- а) $(\sqrt{15} + \sqrt{35}) \cdot \sqrt{5}$; г) $(4\sqrt{7} - 2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{7} + 3\sqrt{84}$;
б) $\sqrt{3}(\sqrt{27} - 3\sqrt{15})$; д) $(\sqrt{15} - 3\sqrt{2} + \sqrt{5}) \cdot 2\sqrt{5} + \sqrt{360}$;
в) $(2\sqrt{6} - 5\sqrt{3}) \cdot 4\sqrt{3}$; е) $(\sqrt{50} + 2\sqrt{12}) \cdot \sqrt{5} - \sqrt{240}$.

480. Упростите выражение:

- а) $(\sqrt{a} + b)(\sqrt{a} - b)$; г) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$;
б) $(\sqrt{14} + \sqrt{50})(\sqrt{14} - \sqrt{50})$; д) $(c - \sqrt{d})^3$;
в) $(m + \sqrt{m})^2$; е) $(3 + \sqrt{5})(9 - 3\sqrt{5} + 5)$.

481. Упростите выражение:

- а) $(3\sqrt{5} - 1)(1 + 3\sqrt{5})$; в) $(2 + 3\sqrt{6})^2$;
б) $(\sqrt{11} + 4\sqrt{7})(2\sqrt{7} - 3\sqrt{11})$; г) $(2\sqrt{3} - 9)^2$.

482. Упростите выражение:

- а) $(\sqrt{5} + \sqrt{7})^2 - \sqrt{140}$; в) $(2\sqrt{2} + \sqrt{10})^2 - 12\sqrt{125}$;
б) $\sqrt{60} + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$; г) $(\sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{5 - \sqrt{7}})^2$.

483. Раскройте скобки и приведите подобные:

- а) $(\sqrt{q} - \sqrt{a})(\sqrt{a} + \sqrt{q})$; в) $(3\sqrt{7} + 7\sqrt{3})(3\sqrt{7} - 7\sqrt{3})^2$;
б) $(\sqrt{3} - \sqrt{r})^2$; г) $(10 - \sqrt{3})^2 + 5\sqrt{48}$.

484. Раскройте скобки и приведите подобные:

- а) $(\sqrt{a} - \sqrt{7})(\sqrt{a} + \sqrt{7})^2$; в) $(\sqrt{2} + \sqrt{18})^3$;
б) $(5\sqrt{3} - 3\sqrt{5})^2(5\sqrt{3} + 3\sqrt{5})$; г) $(\sqrt{m} + \sqrt{n})^3(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2$.

485. По формуле разности квадратов разложите на множители выражение:

- а) $a^2 - 5$; б) $4b^2 - 7$; в) $11y^2 - 1$; г) $t - 3$, где $t \geq 0$.

486. Разложите на множители выражение:

- а) $2 + \sqrt{2}$; б) $v + \sqrt{v}$; в) $\sqrt{g} - \sqrt{3g}$; г) $\sqrt{12} - \sqrt{6}$.

487. Сократите дробь:

- а) $\frac{h^2 - 5}{h - \sqrt{5}}$; г) $\frac{k - 16}{\sqrt{k} + 4}$; ж) $\frac{\sqrt{6} - 6}{\sqrt{6} - 1}$; к) $\frac{2s^2 - 3}{s\sqrt{2} - \sqrt{3}}$;
б) $\frac{l + \sqrt{8}}{8 - l^2}$; д) $\frac{l - m}{\sqrt{l} + \sqrt{m}}$; з) $\frac{q - \sqrt{q}}{\sqrt{q} - 1}$; л) $\frac{4t^2 - 8}{2t + 2\sqrt{2}}$;
в) $\frac{3 - \sqrt{j}}{j - 9}$; е) $\frac{3\sqrt{n} - 2\sqrt{p}}{9n - 4p}$; и) $\frac{11 + \sqrt{r}}{11\sqrt{r} + r}$; м) $\frac{3a - 2}{\sqrt{3a} + \sqrt{2}}$.

488. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

- а) $\frac{a}{\sqrt{3}}$; г) $\frac{x}{y\sqrt{y}}$; ж) $\frac{7}{4\sqrt{5}}$; к) $\frac{11}{2\sqrt{8}}$;
 б) $\frac{5}{\sqrt{b}}$; д) $\frac{1}{\sqrt{1+z}}$; з) $\frac{6}{5\sqrt{3}}$; л) $\frac{p}{7\sqrt{p}}$;
 в) $\frac{3}{5\sqrt{c}}$; е) $\frac{4}{\sqrt{m-n}}$; и) $\frac{5\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}$; м) $\frac{4}{3\sqrt{6}}$.

489. Избавьтесь от иррациональности в числителе:

- а) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; в) $\frac{a\sqrt{a}}{b}$; д) $\frac{3\sqrt{7}}{5}$; ж) $\frac{\sqrt{2q}}{r}$; и) $\frac{\sqrt{mn}}{n\sqrt{n}}$;
 б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\frac{\sqrt{3x}}{4}$; е) $\frac{\sqrt{c}}{d}$; з) $\frac{\sqrt{3t}}{t^2}$; к) $\frac{r\sqrt{s}}{\sqrt{rs}}$.

490. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

- а) $\frac{3}{\sqrt{2}+1}$; в) $\frac{5}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; д) $\frac{7}{6-2\sqrt{2}}$; ж) $\frac{34}{9-\sqrt{13}}$;
 б) $\frac{2}{1-\sqrt{2}}$; г) $\frac{x}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}$; е) $\frac{44}{7+3\sqrt{3}}$; з) $\frac{16}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

491. Докажите, что:

- а) $\sqrt{\frac{4}{5}} = 0,2\sqrt{20}$; б) $\sqrt{\frac{3}{x}} = \frac{1}{x}\sqrt{3x}$; в) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{|b|}\sqrt{ab}$.

492. Упростите:

- а) $\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, где $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$;
 б) $\frac{2b\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$, где $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$.

493. Упростите:

- а) $\frac{\sqrt{m+x} + \sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x} - \sqrt{m-x}}$, где $x = \frac{2mn}{1+n^2}$;
 б) $\frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{x}}} + \frac{1}{\sqrt{a-\sqrt{x}}}$, где $x = 4(a-1)$.

494. Объем V цилиндра (рис. 207) можно вычислить по формуле $V = \pi R^2 h$, где R — радиус основания, h — высота цилиндра. Выразите переменную R через переменные V и h и найдите значение R , если:

- а) $V = 2198$ и $h = 7$;
 б) $V = 23\ 550$ и $h = 12$.

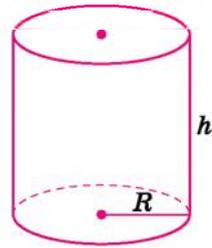


Рис. 207

495. Точка M — внутренняя точка отрезка AB . На прямой AB найдите все такие точки X , для которых $AX + MX = BX$.

496. Докажите, что:

- а) в прямоугольном треугольнике медиана прямого угла равна половине гипотенузы;
 б) если одна из медиан треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный.

497. На рисунке 208 показана развертка цилиндра, боковая поверхность которого равна 220 см^2 . Найдите радиус основания цилиндра, учитывая, что измерения прямоугольника, который представляет боковую поверхность, относятся как $11 : 5$. Значение числа π возьмите равным $\frac{22}{7}$.

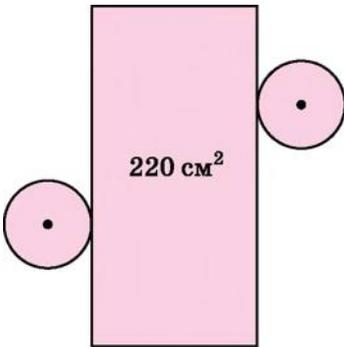


Рис. 208

498. В 9 ч утра из города со скоростью 48 км/ч выехал мотоциклист. Через 50 мин вслед за ним выехал автомобилист со скоростью 63 км/ч. Определите, в какой момент расстояние между мотоциклистом и автомобилистом станет равным 42 км.

499. Через 40 мин после выезда из города A автомобилист увеличил скорость на 20 % и через определенное время прибыл в город B . Определите время движения автомобилиста, учитывая, что на вторую половину пути он затратил на 6 мин меньше, чем на первую.

500. Мотоциклист проехал путь из деревни в город и назад за 1 ч 6 мин. Определите расстояние от деревни до города, если в город мотоциклист ехал со скоростью 60 км/ч, а из города — 50 км/ч.

501. На путь в 60 км велосипедисту понадобилось 4 ч 50 мин, из которых полчаса он отдыхал. На каком расстоянии от конечного пункта отдыхал велосипедист, если до отдыха его скорость была 15 км/ч, а после отдыха — 12 км/ч?

* * *

502. (Из коллекции профессора Брайена.)

— Сегодня также только одна карточка выигрывает, две остальные проигрышные, — сказал профессор Брайен, выложив на стол три карточки, показанные на рисунке 209.



Рис. 209

— А каким подсказкам можно верить?

— На выигрышной карточке подсказка истинная, а из двух остальных хотя бы одна ложная.

Какую карточку нужно перевернуть, чтобы выиграть 10 фунтов?

503. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle BAC + \angle ACD = 180^\circ$. Докажите, что $AB + CD < AD + BC$.

504. На окружности отмечено 10 точек, которые разделяют ее на 10 равных дуг. Сколько существует неравных треугольников с вершинами в отмеченных точках? А четырехугольников?

Правообладатель Народная асвета

IV

раздел

Площадь фигур

15. Площадь треугольника. Теорема Пифагора

А. Понятием площади мы часто пользуемся в жизни. Мы понимаем, что означают утверждения «Площадь комнаты равна 21 м^2 », «Площадь садового участка равна 10 а », «Площадь озера Свитязь равна 224 га », «Площадь Беларуси равна $207,6 \text{ тыс. км}^2$ ».

Площадь — определенное свойство геометрической фигуры. Если выбрать единицу измерения, то площадь фигуры можно измерить, т. е. выразить числом. Понятны следующие свойства площади.

Площадь фигуры — неотрицательное число (рис. 210).

Площади равных фигур равны (рис. 211).

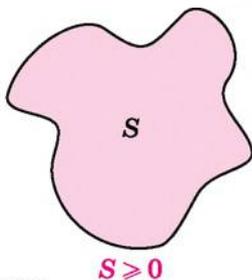
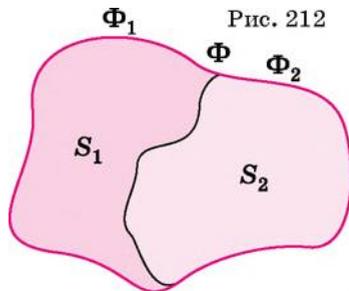
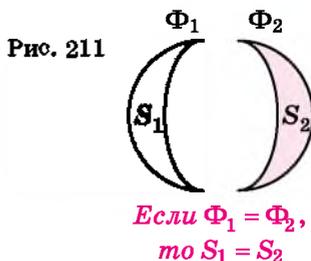


Рис. 210

Если фигура разделена на части, то площадь фигуры равна сумме площадей этих частей (рис. 212).

Напомним, что похожие свойства есть и у длины отрезка, градусной меры угла.

Вместе с этими свойствами нам потребуется еще и такое свойство.



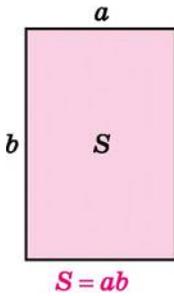


Рис. 213

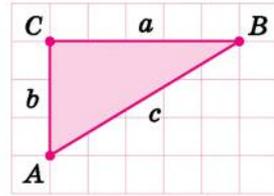


Рис. 214

Площадь S прямоугольника со сторонами a и b равна ab (рис. 213).

Покажем, как можно использовать свойства площади для доказательства утверждений. Докажем, например, известную вам теорему Пифагора.

Теорема 1. В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

Доказательство. Пусть дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 214). Его катеты CA , CB и гипотенузу AB обозначим b , a и c соответственно. Построим два квадрата со стороной, равной $a + b$. Первый из них можно разделить так, чтобы образовались квадрат со стороной c и четыре треугольника, равные данному треугольнику ABC (рис. 215), второй — так, чтобы образовались два квадрата — один со стороной a , а другой со стороной b — и снова четыре треугольника, равных данному треугольнику ABC (рис. 216). Понятно, что если от этих квадратов убрать по четыре равных друг другу треугольника, то останутся фигуры с равны-

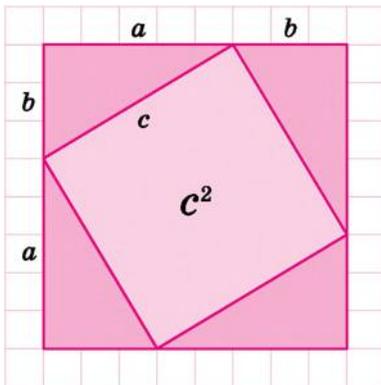


Рис. 215

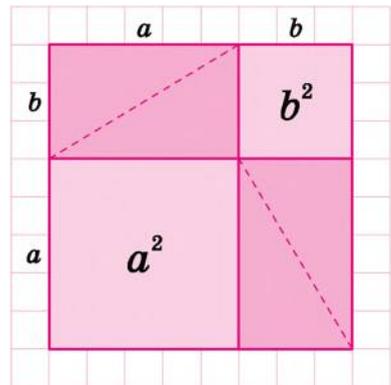


Рис. 216

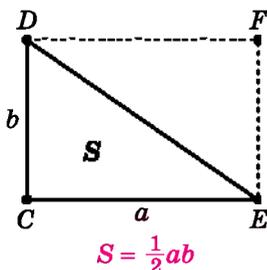


Рис. 217

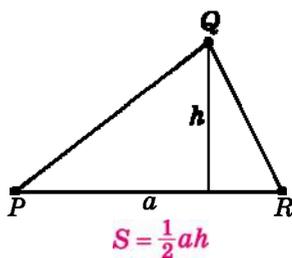


Рис. 218

ми площадями. Поскольку одна из этих площадей равна c^2 , а другая — $a^2 + b^2$, то $c^2 = a^2 + b^2$.

Используя рисунки 217 и 218, вспомните, как доказывалась следующая теорема.

Теорема 2. Если S — площадь треугольника, a — его основание, h — проведенная к нему высота, то $S = \frac{1}{2}ah$.

Б. С помощью теоремы 2 доказывается теорема 3, которая выражает важное свойство прямоугольного треугольника.

Теорема 3. Если прямоугольные треугольники имеют по одинаковому острому углу, то отношение противолежащего этому углу катета к гипотенузе в одном треугольнике равно соответствующему отношению в другом.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы C и C_1 прямые и $\angle A = \angle A_1$ (рис. 219). Докажем, что $BC : AB = B_1C_1 : A_1B_1$.

На лучах AB и AC отложим отрезки, равные A_1C_1 и A_1B_1 : $AN = A_1C_1$ и $AM = A_1B_1$ (рис. 220). Тогда по первому признаку равенства треугольников $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AMN$, поэтому $B_1C_1 = MN$. Найдем площадь треугольника ABM двумя способами: $S_{ABM} = \frac{1}{2}AM \cdot BC$ и $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB \cdot MN$. Тогда $AM \cdot BC =$

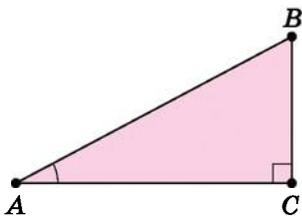


Рис. 219

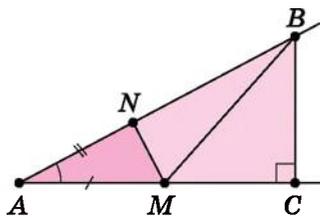
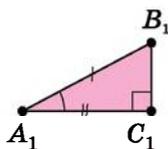


Рис. 220

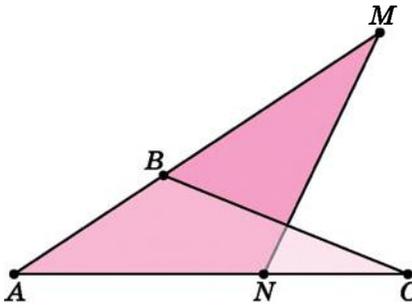


Рис. 221

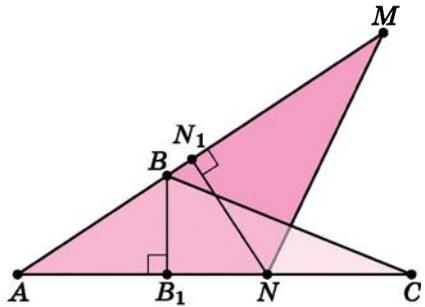


Рис. 222

$= AB \cdot MN$, откуда $BC : AB = MN : AM$. Заменяя в последнем равенстве отрезки MN и AM равными им отрезками B_1C_1 и A_1B_1 , получим нужное равенство $BC : AB = B_1C_1 : A_1B_1$.

В. Используем теорему 3 для доказательства теоремы 4, которая выражает свойство площади треугольников.

Теорема 4. Если треугольники ABC и AMN имеют общую вершину A и остальные вершины расположены на двух прямых, проходящих через эту общую вершину, то площади этих треугольников относятся как произведения их сторон, выходящих из общей вершины:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \frac{AB \cdot AC}{AM \cdot AN}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда треугольники имеют общий угол (рис. 221). Проведем высоты BB_1, NN_1 (рис. 222). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} &= \frac{\frac{1}{2}AC \cdot BB_1}{\frac{1}{2}AM \cdot NN_1} = \frac{AC}{AM} : \frac{NN_1}{BB_1} = \frac{AC}{AM} : \left(\frac{NN_1}{AN} \cdot \frac{AN}{BB_1} \right) \stackrel{(1)}{=} \\ &= \frac{AC}{AM} : \left(\frac{BB_1}{AB} \cdot \frac{AN}{BB_1} \right) = \frac{AC}{AM} : \frac{AN}{AB} = \frac{AC \cdot AB}{AM \cdot AN}. \end{aligned}$$

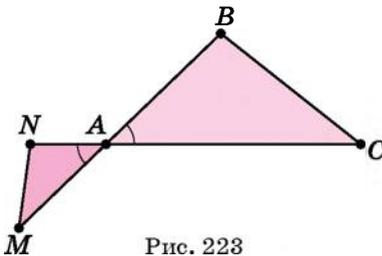


Рис. 223

При переходе (1) использована теорема 3.

Случай, когда углы треугольников при общей вершине вертикальны (рис. 223), легко свести к рассмотренному. Треугольник AM_1N_1 , симметричный относительно точки A треуголь-

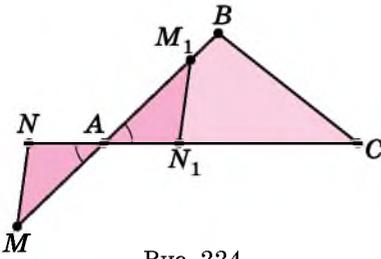


Рис. 224

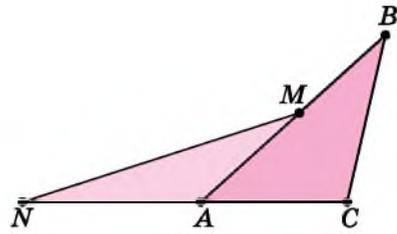


Рис. 225

нику AMN (рис. 224), равен ему и, значит, $S_{AMN} = S_{AM_1N_1}$, $AM = AM_1$, $AN = AN_1$. Поэтому

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \frac{S_{ABC}}{S_{AM_1N_1}} = \frac{AB \cdot AC}{AM_1 \cdot AN_1} = \frac{AB \cdot AC}{AM \cdot AN}.$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда углы треугольников при общей вершине смежные (рис. 225). Пусть K — точка, симметричная точке N относительно точки A . Треугольники AMN и AMK имеют равные площади, поскольку у них равные основания AN и AK и общая высота MM_1 (рис. 226), проведенная к ним. Поэтому

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \frac{S_{ABC}}{S_{AMK}} = \frac{AB \cdot AC}{AM \cdot AK} = \frac{AB \cdot AC}{AM \cdot AN}.$$

Докажем теперь формулу, позволяющую находить площадь треугольника по известным его сторонам.

Теорема 5. Если a , b и c — длины сторон треугольника, p — полупериметр, $p = \frac{a+b+c}{2}$, S — площадь треугольника, то

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

▲ **Доказательство.** Пусть a , b и c — длины сторон BC , AC и AB треугольника ABC (рис. 227). Проведем высоту CC_1 к наибольшей стороне и обозначим x длину отрезка AC_1 . Тогда $BC_1 = c - x$. По теореме Пифагора получим:

$$CC_1^2 = AC^2 - AC_1^2 = b^2 - x^2; \quad CC_1^2 = BC^2 - BC_1^2 = a^2 - (c - x)^2.$$

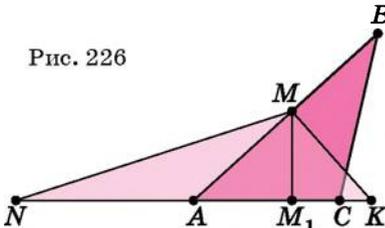


Рис. 226

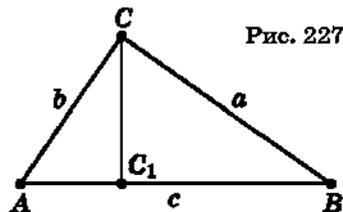


Рис. 227

Поэтому $b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$. Решим это уравнение и найдем x :

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2;$$

$$2cx = b^2 + c^2 - a^2;$$

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Тогда

$$h = CC_1 = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot CC_1 = \frac{1}{2} c \cdot h = \frac{1}{2} c \cdot \sqrt{b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2} = \\ &= \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\frac{b^2 \cdot 4c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}} = \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{2c} \cdot \sqrt{b^2 \cdot 4c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - (b^2 + c^2 - a^2))} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{((b + c)^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{((b + c)^2 - a^2)(a^2 - (b^2 - 2bc + c^2))} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{((b + c)^2 - a^2)(a^2 - (b - c)^2)} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)} = \\ &= \sqrt{\frac{(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)}{16}} = \\ &= \sqrt{\frac{b + c + a}{2} \cdot \frac{b + c + a - 2a}{2} \cdot \frac{a + b + c - 2c}{2} \cdot \frac{a + b + c - 2b}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{b + c + a}{2} \cdot \left(\frac{b + c + a}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} - b\right) \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} - c\right)} = \\ &= \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}. \blacktriangle \end{aligned}$$

Формула $S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$ называется формулой Герона.

Герон Александрийский (I ст.) — древнегреческий ученый, работавший в Александрии. Математические работы Герона являются энциклопедией античной практической математики.



1. Сформулируйте свойства площади.
2. Чему равна площадь прямоугольника с измерениями a и b ?
3. Докажите теорему Пифагора с использованием свойств площади.

4. Чему равна площадь прямоугольного треугольника с катетами a и b ?
5. Запишите формулу для площади треугольника, в которой использованы сторона и проведенная к ней высота, и докажите ее.
6. Сформулируйте утверждение о площади треугольников, которые имеют общую вершину, а остальные вершины расположены на двух прямых, проходящих через эту общую вершину.
7. Сформулируйте свойство перпендикуляров, проведенных из одной стороны острого угла на другую его сторону.
8. Запишите формулу Герона и объясните, что означает в ней каждая переменная.

505. Вырежьте из бумаги два равных прямоугольных треугольника. Составьте из них:

- а) прямоугольник;
- б) параллелограмм-непрямоугольник;
- в) равнобедренный треугольник.

Сделайте в тетради рисунки полученных четырехугольников. Что вы можете сказать о площадях этих фигур?

506. Вырежьте из бумаги два равных разносторонних треугольника. Составьте из них три разных параллелограмма. Сделайте в тетради рисунки полученных четырехугольников. Что вы можете сказать о площадях этих фигур?

507. Начертите в тетради квадрат и считайте, что его площадь равна единице. Начертите:

- а) квадрат, площадь которого равна 4 квадратным единицам;
- б) прямоугольник-неквадрат, площадь которого равна 4 квадратным единицам;
- в) треугольник, площадь которого равна 2 квадратным единицам;
- г) треугольник, площадь которого равна 6 квадратным единицам.

508. Определите, как изменится площадь прямоугольника, если:

- а) одну его сторону увеличить в k раз;
- б) одну его сторону увеличить в k раз, а другую — в l раз;
- в) одну его сторону в k раз увеличить, а другую — в k раз уменьшить;
- г) одну его сторону в k раз увеличить, а другую — в l раз уменьшить.

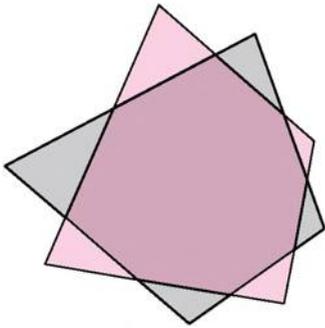


Рис. 228

509. Два равновеликих четырехугольника наложены друг на друга так, как показано на рисунке 228. Докажите, что суммарная площадь синих треугольников равна суммарной площади серых треугольников.

510. Найдите сторону квадрата, равновеликого прямоугольнику с измерениями 8 м и 50 м.

511. Докажите, что площадь круга с радиусом 2 м больше 8 м^2 .

512. Определите периметр прямоугольника, площадь которого равна 216 дм^2 , а измерения относятся как 2 : 3.

513. Прямоугольник, площадь которого равна 150 м^2 , а стороны относятся как 6 : 25, прямой, параллельной одной из сторон, разделен на две части, площади которых относятся как 2 : 3. Определите периметр каждой из полученных частей.

514. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 6.

515. Две стороны треугольника равны 18 дм и 34 дм, а высота, проведенная к одной из них, составляет 17 дм. Найдите высоту, проведенную к другой стороне.

516. Две стороны треугольника равны 9,6 м и 7,2 м, а высота, проведенная к большей из них, — 3,6 м. Найдите высоту, проведенную к меньшей из данных сторон.

517. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника соответственно равны 13 см и 85 см. Найдите периметр и площадь треугольника, а также высоту, проведенную к гипотенузе.

518. Докажите, что:

- медиана делит треугольник на две равновеликие части;
- если произвольную точку M медианы AA_1 треугольника ABC соединить с вершинами B и C , то получатся равновеликие треугольники ABM и ACM .
- три медианы делят треугольник на шесть равновеликих частей.

519. Найдите площадь треугольника MNK , учитывая, что его вершины лежат на сторонах треугольника ABC с площадью 60 дм^2 и $AM : MB = 2 : 1$, $BN : NC = 3 : 1$, $CK : KA = 4 : 1$.

520. Найдите периметр и площадь прямоугольного треугольника, учитывая, что его высота делит гипотенузу на отрезки, равные 3 м и 12 м.

521. Найдите площадь треугольника AMN , учитывая, что точки M и N на сторонах AB и AC выбраны так, что:

а) $AM : AB = 2 : 5$, $AN : AC = 5 : 6$ и площадь треугольника ABC равна 60 см^2 ;

б) $AM : MB = 3 : 2$, $AN : NC = 2 : 3$ и площадь треугольника ABC равна 75 см^2 ;

в) $BM : MA = 2 : 1$, $CN : CA = 5 : 6$ и площадь треугольника ABC равна 90 см^2 .

522. Найдите площадь равнобедренного треугольника, учитывая, что его основание и боковая сторона соответственно равны:

а) 48 мм и 51 мм; б) 20 см и 12 см; в) a и b .

523. Найдите площадь треугольника, учитывая, что его стороны равны:

а) 13, 14, 15; в) 13, 40, 45; д) $5; \sqrt{58}; \sqrt{65}$;
б) 11, 13, 20; г) 5, 51, 52; е) $\sqrt{5}; \sqrt{10}; \sqrt{13}$.

524. Найдите стороны треугольника, учитывая, что они относятся как:

а) $9 : 10 : 17$, а площадь равна 108 м^2 ;
б) $11 : 13 : 20$, а площадь равна $3,3 \text{ а}$.

525. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 28 см и 45 см, а расстояние между их центрами — 53 см. Найдите длину их общей хорды.

526. Найдите сторону треугольника, учитывая, что две другие его стороны и площадь соответственно равны:

а) 11 м и 13 м и 66 м^2 ;
б) 55 см и 65 см и 198 см^2 ;
в) 7 дм и 14 дм и $12\sqrt{10} \text{ дм}^2$.

527. Выполните действие:

а) $c^{2n+1} \cdot c^3$; г) $a^7 : a^3$; ж) $b^m : b^n$;
б) $y^{i+3} \cdot y^{i-5}$; д) $x^{34} : x^{34}$; з) $(3y)^5 : 9y^4$;
в) $x^{m-4} \cdot x^{m+5}$; е) $d^{n+6} : d^n$; и) $16s^{14} : (2s^3)^2$.

528. Сократите дробь:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{a^4 - b^4}{(a+b)(a^3 - b^3)}; & \text{г)} \frac{ij(g^2 + h^2) - gh(i^2 + j^2)}{ij(g^2 - h^2) + gh(i^2 - j^2)}; \\ \text{б)} \frac{(m+n)^3}{m^3 - mn^2}; & \text{д)} \frac{p^2qr - q^3r + 2q^2r^2 - qr^3}{4q^2r^2 - (p^2 - q^2 - r^2)^2}; \\ \text{в)} \frac{4u - 4u^3}{12u^3 - 12u^2}; & \text{е)} \frac{c^3e - 2c^2e^2 + ce^3 - cd^2e}{(c^2 + e^2 - d^2)^2 - 4c^2e^2}. \end{array}$$

529. Упростите выражение:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \left(\frac{a-1}{a+1} - \frac{a+1}{a-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{4} - \frac{1}{4a} \right); & \text{в)} \left(\frac{b+1}{b-1} - \frac{b-1}{b+1} \right) \cdot \left(\frac{1+b^2}{4b} + \frac{1}{2} \right); \\ \text{б)} \left(1 - \frac{2}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{x}{x-3} + \frac{1}{x} - 1 \right); & \text{г)} \left(\frac{y^2+1}{2y-1} - \frac{y}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{3-y}{y+2} \right). \end{array}$$

530. Решите уравнение:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{x-7}{x-5} = \frac{x-9}{x-8}; & \text{в)} \frac{4b+1}{5b+8} = \frac{8b-1}{2(5b+1)}; \\ \text{б)} \frac{a-3}{a-5} = \frac{a-1}{a-4}; & \text{г)} \frac{6y+1}{3y-1} = \frac{6(y+1)}{3y-1}. \end{array}$$

531. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 432 м^3 , а его высота 9 м . Какими могут быть измерения основания параллелепипеда, если большее из них составляет меньше 300% меньшего?

* * *

532. В деревне Крево (теперь в Сморгонском районе) было заключено соглашение между ВКЛ и Польшей, получившее название Кревской унии. Установите дату этого события по таким сведениям. Количество столетий в году заключения на единицу меньше числа события и на пять единиц меньше порядкового номера месяца, который выражается кубом однозначного числа. Количество лет от начала столетия на единицу больше увеличенного в шесть раз числа.

533. Найдите все целые числа x и y , удовлетворяющие равенству $x^2 + 3xy = 13$.

534. Если выписать по кругу цифры $1, 4, 2, 8, 5, 7$ (рис. 229), то при умножении числа $142\ 857$ на $1, 2, 3, 4, 5, 6$

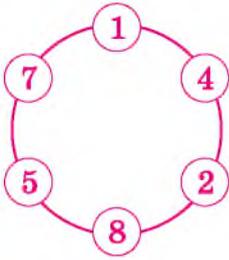


Рис. 229

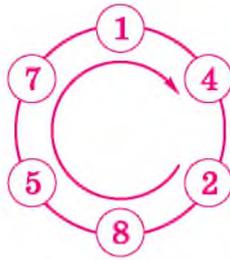


Рис. 230

все произведения можно получить, прочитав по кругу с нужного места выписанные цифры. Например,

$$142\ 857 \cdot 2 = 285\ 714, \quad 142\ 857 \cdot 6 = 857\ 142 \text{ (рис. 230).}$$

Почему так получается?

16. Площадь трапеции, параллелограмма, ромба

На рисунке 231 показана трапеция $MNOP$. Диагональ MO разделяет ее на два треугольника MNO и MPO . Построим высоту OO_1 треугольника MPO . Тогда сторона MP — его основание. Поэтому

$$S_{MPO} = \frac{1}{2} MP \cdot OO_1.$$

Проведем высоту MM_1 треугольника MNO , тогда NO — его основание. Поэтому

$$S_{MNO} = \frac{1}{2} NO \cdot MM_1.$$

Значит,

$$S_{MNOP} = S_{MPO} + S_{MNO} = \frac{1}{2} MP \cdot OO_1 + \frac{1}{2} NO \cdot MM_1.$$

Учитывая, что отрезки MM_1 и OO_1 представляют расстояние между параллельными прямыми NO и MP и потому являются равными, можем записать:

$$S_{MNOP} = \frac{1}{2} MP \cdot OO_1 + \frac{1}{2} NO \cdot MM_1 = \frac{1}{2} MP \cdot OO_1 + \frac{1}{2} NO \cdot OO_1.$$

После вынесения общего множителя $\frac{1}{2} OO_1$ получим:

$$S_{MNOP} = \frac{1}{2} OO_1 \cdot (MP + NO),$$

или

$$S_{MNOP} = \frac{MP + NO}{2} \cdot OO_1.$$

Правообладатель Народная асвета

MP и NO — основания трапеции. Перпендикуляр OO_1 , опущенный из вершины трапеции на ее основание, называется **высотой** трапеции.

Мы доказали, что справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.*

Обозначим основания трапеции буквами a и b , а высоту — буквой h . Тогда доказанное утверждение запишется формулой:

$$S_{\square} = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

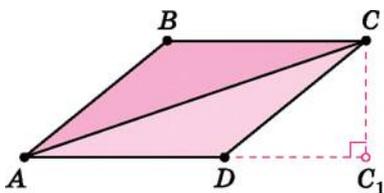


Рис. 232

Рассуждения, с помощью которых установлена эта формула, использовали только параллельность двух сторон четырехугольника. Эти рассуждения можно повторить без изменений для параллелограмма $ABCD$, изображенного на рисунке 232.

Используем параллельность сторон BC и AD . Пусть CC_1 — перпендикуляр, проведенный из точки C на прямую AD . Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CC_1.$$

Поскольку $AD = BC$, то эта формула упростится так:

$$S_{ABCD} = \frac{AD + AD}{2} \cdot CC_1 = \frac{2AD}{2} \cdot CC_1 = AD \cdot CC_1.$$

Отрезок CC_1 называют **высотой** параллелограмма, а сторону, к которой проведена высота, — **основанием** параллелограмма.

Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.*

Обозначив основание буквой a , а высоту буквой h , это утверждение можно записать формулой:

$$S_{\square} = a \cdot h.$$

Теорема 8. *Площадь четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями равна половине произведения диагоналей.*

Доказательство. Пусть диагонали KM и LN четырехугольника $KLMN$ пересекаются в точке O под прямым углом (рис. 233). Тогда отрезки LO и NO — высоты в треугольниках KLM и KNM соответственно. Значит,

$$\begin{aligned} S_{KLMN} &= S_{KLM} + S_{KNM} = \\ &= \frac{1}{2} KM \cdot LO + \frac{1}{2} KM \cdot NO = \\ &= \frac{1}{2} KM \cdot (LO + NO) = \frac{1}{2} KM \cdot LN. \end{aligned}$$

Следствие. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

$$S_{\square} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2.$$

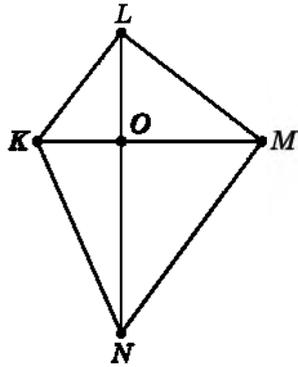


Рис. 233

- ? 1. По какой формуле можно найти площадь треугольника? Что означает каждая переменная в этой формуле?
 2. Какие отрезки называют основаниями трапеции; высотой трапеции?
 3. Запишите формулу для площади трапеции и докажите ее.
 4. Какой отрезок называют высотой параллелограмма; основанием параллелограмма?
 5. Запишите формулу для площади параллелограмма и докажите ее.
 6. Запишите формулу для площади ромба, в которой использованы его диагонали, и докажите ее.

535. Найдите площадь трапеции по сведениям, приведенным на рисунке 234.

536. Основания трапеции равны 15 см и 20 см, а ее площадь равна 420 см^2 . Найдите высоту трапеции.

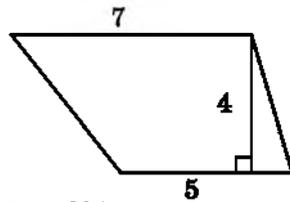


Рис. 234

537. Площадь трапеции равна 35 дм^2 , а ее высота — 5 дм. Найдите основания трапеции, учитывая, что они относятся как 3 : 4.

538. Параллелограмм $MNKL$ задан координатами своих вершин. Вычислите его площадь двумя способами, взяв в качестве основания разные стороны параллелограмма, и найдите абсолютную и относительную погрешности каждого из результатов, если:

- а) $M(-6; -1)$, $N(-1; 7)$, $K(5; 4)$, $L(0; -4)$;
 б) $M(-1; -2)$, $N(-8; 3)$, $K(1; 6)$, $L(8; 1)$;
 в) $M(-8; -2)$, $N(-4; -6)$, $K(8; -4)$, $L(4; 0)$.

539. Сделайте нужные измерения и определите площадь параллелограмма, изображенного на рисунке:

- а) 235; б) 236; в) 237; г) 238.



Рис. 235

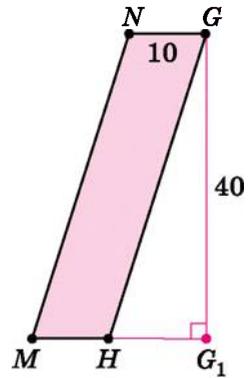


Рис. 236

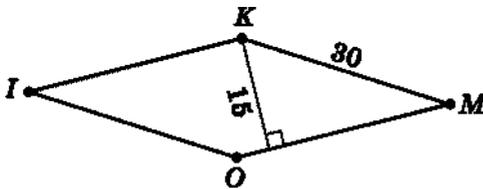


Рис. 237

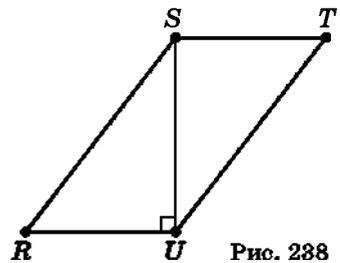


Рис. 238

540. Площадь параллелограмма $ABCD$ на рисунке 239 вычислите двумя способами, взяв в качестве основания разные стороны параллелограмма. Найдите абсолютную и относительную погрешности каждого из двух результатов, взяв в качестве точного значения площади значение, равное 2377 мм^2 .

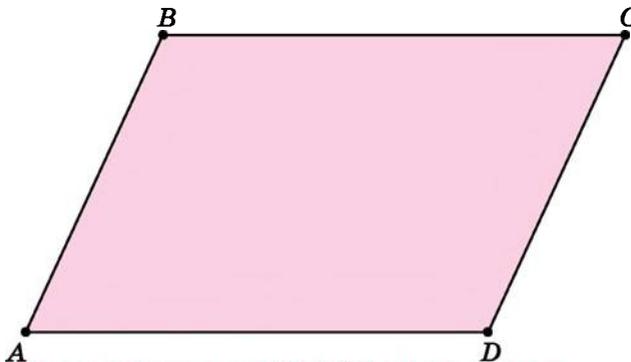


Рис. 239

541. Площадь параллелограмма со сторонами 48 см и 56 см равна 1008 см^2 . Найдите обе высоты параллелограмма.

542. В параллелограмме $CDEF$ сторона CD больше стороны DE (рис. 240). Докажите, что высота FF_1 , проведенная к стороне CD , меньше высоты FF_2 , проведенной к стороне DE .

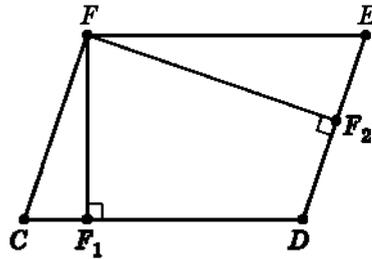


Рис. 240

543. Площадь параллелограмма равна 360 см^2 , а его периметр 102 см. Найдите расстояние между большими сторонами, если расстояние между меньшими равно 24 см.

544. Сторона ромба равна 8 м, а один из его углов — 120° . Найдите площадь ромба.

545. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, учитывая, что треугольник, ограниченный диагональю BD и прямыми, проходящими через вершину A и середины сторон BC и CD , имеет площадь 10 см^2 .

546. Найдите площадь параллелограмма, учитывая, что его периметр равен 70 м, а высоты — 15 м и 27 м.

547. Пусть a и b — стороны параллелограмма, h_a — высота, проведенная к стороне a , h_b — высота, проведенная к стороне b , а S — площадь параллелограмма. Заполните пустые клетки следующей таблицы.

	a	b	h_a	h_b	S
а)	12 см	30 см	8 см		
б)	38 мм	64 мм		57 мм	
в)	24 м	27 м			108 м^2
г)	26 дм			39 дм	156 дм^2
д)		1,1 км	132 м		264 а
е)			1,75 км	1,25 км	280 га
ж)		38 км	20 км		760 км^2

548. Стороны параллелограмма и прямоугольника соответственно равны. Найдите углы параллелограмма, учитывая, что его площадь в два раза меньше площади прямоугольника.

549. Ромб имеет такой же периметр, как и данный квадрат. Площадь какой из этих фигур больше?

550. Найдите площадь ромба, у которого высота равна 24 м, а меньшая диагональ — 25 м.

551. Одна сторона параллелограмма равна 29 м, а перпендикуляр, опущенный из точки пересечения диагоналей на другую сторону, делит ее на части, равные 31 м и 11 м. Найдите площадь параллелограмма.

552. Внутреннюю точку X параллелограмма $ABCD$ соединили с его вершинами. Докажите, что суммарная площадь треугольников AXD и BXC такая же, как и суммарная площадь треугольников AXB и CXD .

553. Диагональ параллелограмма, равная 20 дм, перпендикулярна стороне, равной 21 дм. Найдите периметр и площадь параллелограмма.

554. Сторона параллелограмма равна 45 мм, а его диагональ длиной 76 мм образует с этой стороной угол в 30° . Найдите площадь параллелограмма.

555. Найдите площадь ромба, диагонали которого равны:
 а) 4,8 дм и 36 см; б) 18 м и 66 м; в) 6 см и 56 мм.

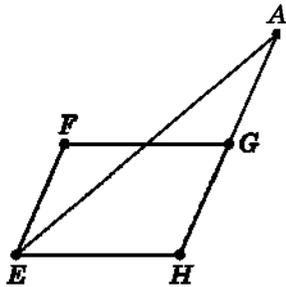


Рис. 241

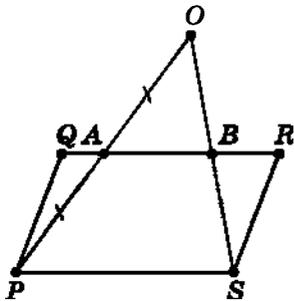


Рис. 242

556. Найдите диагонали ромба, учитывая, что одна из них составляет $\frac{5}{6}$ другой, а площадь ромба равна 540 см^2 .

557. Диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны и равны 38 мм и 70 мм. Найдите площадь четырехугольника.

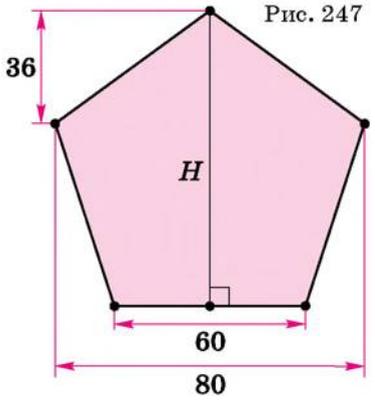
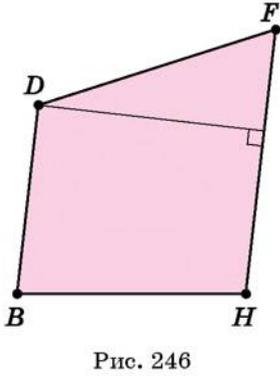
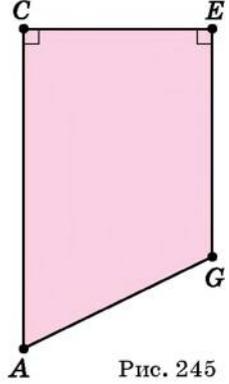
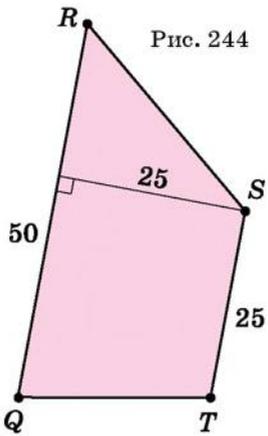
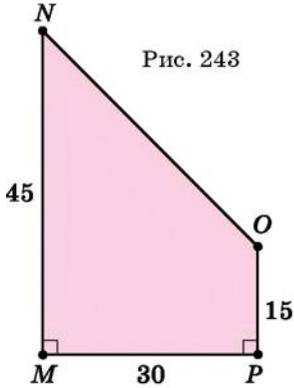
558. На рисунке 241 точка A симметрична вершине H параллелограмма $EFGH$ относительно вершины G . Докажите, что площади параллелограмма $EFGH$ и треугольника EAH равны.

559. Стороны PO и SO треугольника POS пересекают сторону QR параллелограмма $PQRS$ в точках A и B , причем точка A — середина отрезка PO (рис. 242). Докажите, что треугольник POS и параллелограмм $PQRS$ равновелики.

560. Смежные стороны параллелограмма равны 10 см и 15 см, а угол между ними — 30° . Найдите площадь параллелограмма.

561. Сделайте нужные измерения и найдите площадь трапеции на рисунке:

- а) 243; б) 244; в) 245; г) 246.



562. Найдите высоту H осесимметричной фигуры на рисунке 247, учитывая, что площадь фигуры равна 4520 мм^2 , и все размеры указаны в миллиметрах.

563. Стороны параллелограмма равны 12 дм и 21 дм. Найдите площадь параллелограмма, учитывая, что угол между его сторонами равен:

- а) 30° ; б) 45° ; в) 60° .

564. Найдите сторону ромба, площадь которого равна Q , а диагонали относятся как $k:l$.

565. Докажите, что:

- а) если провести диагонали трапеции, то из полученных четырех треугольников два треугольника, прилежащие к боковым сторонам, равновелики;
б) если из четырех треугольников, на которые разделяют четырехугольник его диагонали, два треугольника, прилежащие к противоположным сторонам, равновелики, то такой четырехугольник является трапецией.

566. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 90 м и 120 м, а медиана, проведенная к третьей стороне, — 75 м.

567. Найдите углы:

- а) прямоугольной трапеции (рис. 248);
б) равнобедренной трапеции (рис. 249).



Рис. 248



Рис. 249

568. За первый час туристы прошли 5 км, а затем шли еще t ч со скоростью 4 км/ч. Запишите формулой зависимость пути S от времени t . Постройте график движения туристов.

569. Постройте график зависимости между величинами x и y , которая выражается формулой:

- а) $y = 2x$; в) $y = \frac{1}{2}x$; д) $y = -2x + 2$;
б) $y = -2x$; г) $y = -\frac{1}{2}x$; е) $y = \frac{1}{2}x - 2$.

570. Решите неравенство:

- а) $\frac{3a+4}{5} < \frac{7a-8}{6} + \frac{1+7a}{15}$; б) $\frac{5c-1}{2} + \frac{2c-2}{7} > \frac{13c+9}{6}$.

571. Решите систему неравенств:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} 4a + 5 < 2a + 3, \\ 2a + 3 > 9 + 4a; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} 5b + 2 \geq 6b - 17, \\ 4b - 7 < 6b - 13; \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{в) } \begin{cases} 7c + 2 > 2(3c + 4), \\ 10c - 5 \leq 5(c + 1); \end{cases} \\ \text{г) } \begin{cases} 5d - 3 \geq 2d + 7, \\ 5(d + 1) \leq 9d - 5. \end{cases} \end{array}$$

572. Лахвица и Живорезка — крупнейшие притоки Лахвы. Если площадь водосбора Лахвы уменьшить на 2 км^2 , а площади водосбора Лахвицы и Живорезки увеличить каждую на 6 км^2 , то получатся квадраты, стороны которых относятся как $9 : 3 : 4$. Найдите площади водосбора этих рек, учитывая, что без площади водосбора названных притоков площадь водосбора Лахвы составляет 518 км^2 .

573. По рисунку 250, на котором представлены соотношения между длинами Лахвы, Живорезки и Лахвицы, составьте задачу и решите ее.

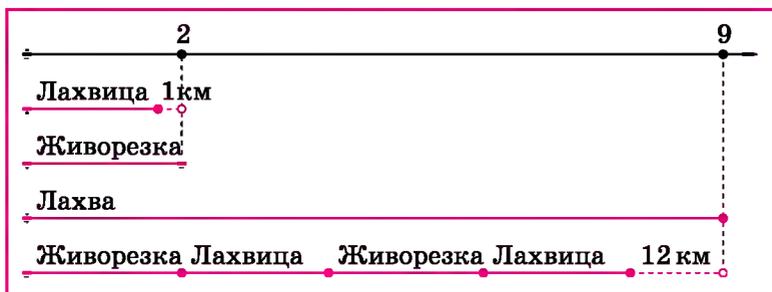


Рис. 250

* * *

574. Найдите все четные пятизначные числа, записанные различными цифрами без использования цифры ноль, учитывая, что три первые цифры числа образуют точный квадрат, а две последние — точный куб.

575. Расставьте по кругу числа 14, 23, 57, 64, 249, 374, 608, 1536 так, чтобы каждые два соседних числа имели общую цифру.

576. Найдите такое наименьшее число, что если перед ним приписать цифру 3, а после него цифру 8, то получится число, в 83 раза большее исходного.

17. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла

Пусть дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 251). Катет BC является противолежащим углу A , а катет AC — прилежащим к углу A .

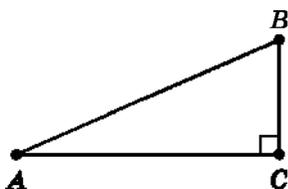


Рис. 251

Синусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к прилежащему.

Котангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к противолежащему.

Синус, косинус, тангенс и котангенс угла A обозначают $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$ и $\operatorname{ctg} A$ соответственно: $\sin A = \frac{BC}{AB}$, $\cos A = \frac{AC}{AB}$, $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$, $\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}$.

Видим, что $\operatorname{tg} A \operatorname{ctg} A = 1$. Поскольку $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = BC : AC = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB} = \sin A : \cos A = \frac{\sin A}{\cos A}$, то верно тождество $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}$.

Значит, $\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}$.

Докажем еще тождество $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. Имеем: $\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = 1$, так как по теореме Пифагора $BC^2 + AC^2 = AB^2$.

Теорема 9. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла зависят только от его величины.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы C и C_1 прямые, а углы A и A_1 равны (рис. 252). В соответствии с теоремой 3 $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$. Поэтому $\sin A = \sin A_1$.

Чтобы доказать, что $\cos A = \cos A_1$, обратим внимание на то, что в прямоугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы B и B_1 также равны, поскольку $\angle B = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - \angle A_1 = \angle B_1$. Теперь применим теорему 3 к прямоугольным треугольни-

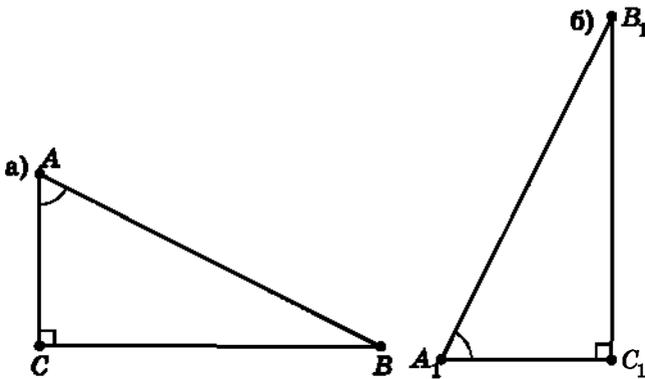


Рис. 252

кам ABC и $A_1B_1C_1$ с равными острыми углами B и B_1 и получим, что $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$. Но $\frac{AC}{AB} = \cos A$ и $\frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \cos A_1$. Значит, $\cos A = \cos A_1$.

Наконец используем установленную связь между тангенсом и котангенсом угла и его синусом и косинусом. Будем

$$\text{иметь: } \operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A_1}{\cos A_1} = \operatorname{tg} A_1, \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\cos A_1}{\sin A_1} = \operatorname{ctg} A_1.$$

Из теоремы 9 следует, что синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла зависят только от его величины. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла A с градусной мерой α обозначают $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ соответственно.

Найдем значения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ для углов 30° и 60° . Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник ABC , в котором $\angle A = 30^\circ$ и $\angle B = 60^\circ$ (рис. 253). Мы знаем, что катет, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы. Поэтому

$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}. \text{ А поскольку } \cos 60^\circ = \frac{BC}{AB}, \text{ то } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Чтобы найти $\cos 30^\circ$, используем тождество $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

$$\text{Будем иметь: } \cos 30^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ} =$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Поскольку } \cos 30^\circ =$$

$$= \frac{AC}{AB} = \sin 60^\circ, \text{ то } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Нако-$$

$$\text{нец, } \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

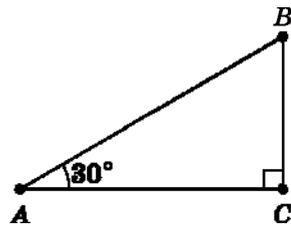


Рис. 253

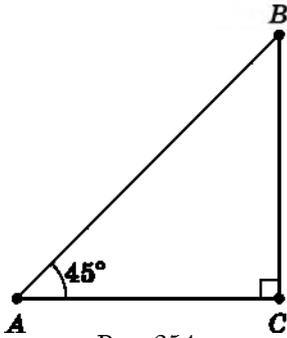


Рис. 254

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Найдем теперь значения $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\operatorname{tg} 45^\circ$ и $\operatorname{ctg} 45^\circ$. Для этого рассмотрим треугольник ABC , в котором $\angle C = 90^\circ$ и $\angle A = 45^\circ$ (рис. 254). Тогда $\angle B = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Поэтому этот треугольник равнобедренный, и значит, $BC = AC$.

По теореме Пифагора находим, что $AB^2 = BC^2 + AC^2 = 2 BC^2$ и поэтому $AB = \sqrt{2} BC$. Значит,

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{\sqrt{2} BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

А поскольку $BC = AC$, то

$$\cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{BC}{AC} = 1,$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 45^\circ} = 1.$$

Чтобы найти значения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ для иных углов α , используют специальные так называемые тригонометрические (от греческих слов «тригонон» — треугольник и «метрайн» — измерять) таблицы.

Первые тригонометрические таблицы, о которых до нас дошли сведения, были составлены в середине II столетия до нашей эры греческим астрономом и математиком Гиппархом.

- ?
1. Какой смысл имеет синус острого угла прямоугольного треугольника?
 2. Чему равен синус 30° ; 45° ; 60° ?
 3. Как можно найти синус данного угла?
 4. Какой смысл имеет косинус острого угла прямоугольного треугольника?
 5. Чему равен косинус 30° ; 45° ; 60° ?
 6. Как можно найти косинус данного угла?
 7. Какой зависимостью связаны синус и косинус одного угла?
 8. Какой смысл имеет тангенс острого угла прямоугольного треугольника?
 9. Какой смысл имеет котангенс острого угла прямоугольного треугольника?
 10. Какой зависимостью связан тангенс с синусом и косинусом того же угла?
 11. Какой зависимостью связан котангенс с синусом и косинусом того же угла?

12. Чему равен тангенс 30° ; 45° ; 60° ?
 13. Чему равен котангенс 30° ; 45° ; 60° ?
 14. Как найти тангенс и котангенс данного угла?

577. Используя определение синуса острого угла прямоугольного треугольника, найдите длину отрезка AB по данным, приведенным на рисунке:

- а) 255; б) 256; в) 257; г) 258.

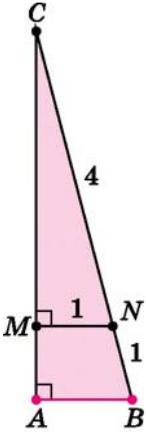


Рис. 255

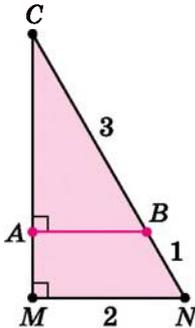


Рис. 256

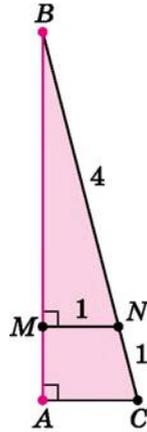


Рис. 257

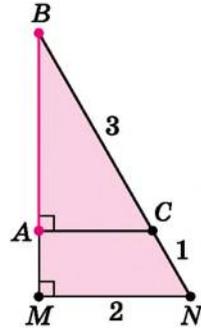


Рис. 258

578. Используя определение синуса острого угла прямоугольного треугольника, найдите длину отрезка AB по данным, приведенным на рисунке:

- а) 259; б) 260; в) 261; г) 262.

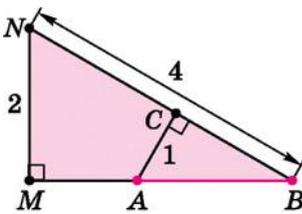


Рис. 259

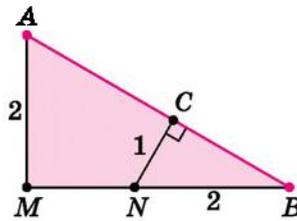


Рис. 260

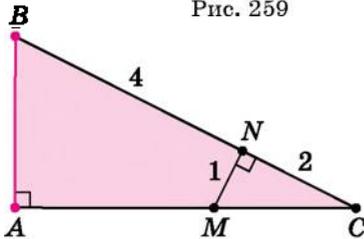


Рис. 261

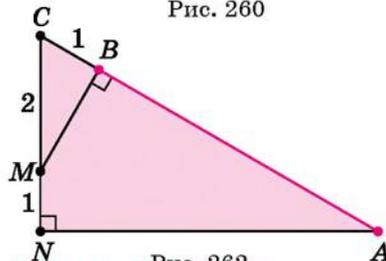


Рис. 262

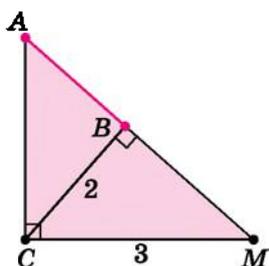


Рис. 263

579. По данным, приведенным на рисунке 263, найдите длину отрезка AB , используя определение синуса.

580. Запишите зависимость переменной b от переменной a , учитывая, что эта зависимость выражена рисунком:

- а) 264; в) 266;
б) 265; г) 267.

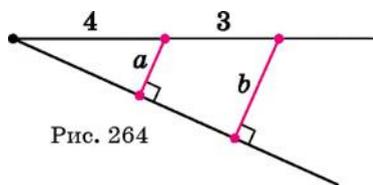


Рис. 264

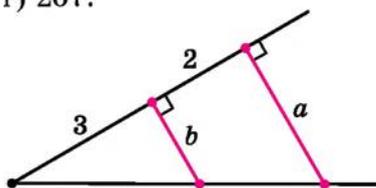


Рис. 265

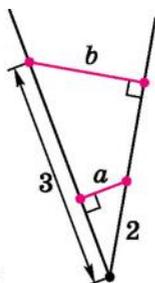


Рис. 266

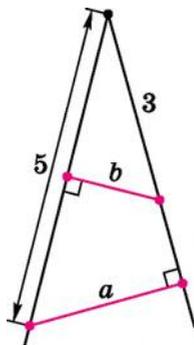


Рис. 267

581. Найдите синусы острых углов прямоугольного треугольника, катет и гипотенуза которого равны:

- а) 3 и 5; б) 24 и 25; в) 3 и 6; г) 5 и $5\sqrt{2}$.

582. Найдите синусы углов треугольника, стороны которого равны:

- а) 17, 25 и 28; б) 17, 25 и 26; в) 25, 74 и 77.

583. Найдите синусы острых углов равнобедренной трапеции, основания и боковая сторона которой соответственно равны:

- а) 20, 38 и 15; б) 31, 47 и 17; в) 41, 61 и 20.

584. Постройте прямоугольный треугольник, синус одного из острых углов которого равен:

- а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{5}{7}$; г) $\frac{14}{27}$.

585. Постройте, если возможно, прямоугольный треугольник, в котором:

- а) синус одного из углов равен $\frac{3}{5}$, а синус другого — $\frac{4}{5}$;
- б) синус одного из углов равен $\frac{1}{2}$, а синус другого — $\frac{8}{9}$;
- в) синус одного из углов равен $\frac{1}{3}$, а синус другого — $\frac{2}{3}$.

586. Используя определение синуса, докажите, что для любого прямоугольного треугольника ABC (рис. 268) верно равенство:

- а) $AC^2 = AB \cdot AC_1$;
- б) $BC^2 = BA \cdot BC_1$;
- в) $CC_1^2 = AC_1 \cdot BC_1$.

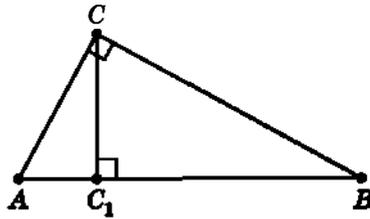


Рис. 268

587. Луч BX принадлежит углу ABC (рис. 269). Докажите, что отношение расстояний XU и XZ от любой точки этого луча до сторон угла ABC не зависит от выбора точки X .

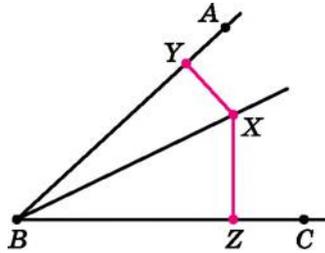


Рис. 269

588. Найдите синусы острых углов треугольника по данным, приведенным на рисунке:

- а) 270; б) 271; в) 272; г) 273.

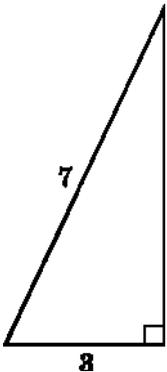


Рис. 270

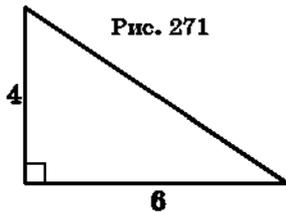


Рис. 271

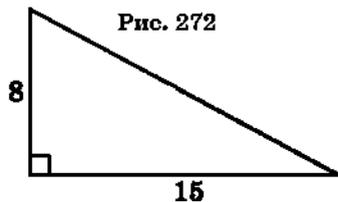


Рис. 272

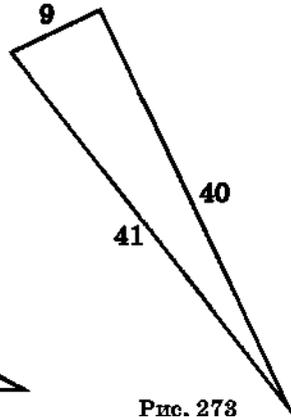


Рис. 273

589. Найдите синусы углов треугольника по данным, приведенным на рисунке:

- а) 274; б) 275; в) 276; г) 277.

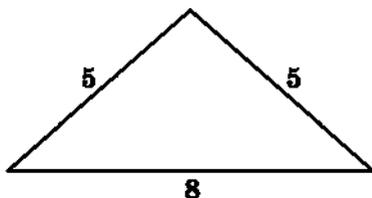


Рис. 274

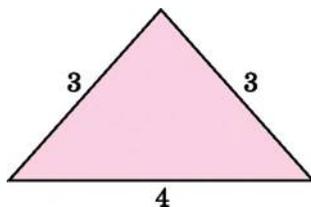


Рис. 275

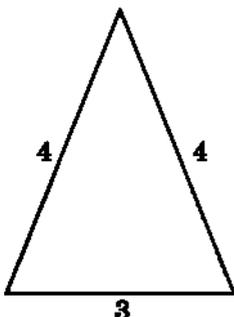


Рис. 276

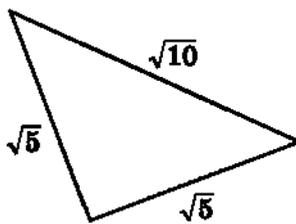


Рис. 277

590. Найдите значение выражения:

- а) $\sin 45^\circ + \sin 60^\circ$; г) $\sin 45^\circ \cdot \sin 60^\circ$; ж) $(\sin 60^\circ)^4$;
 б) $\sin 45^\circ - \sin 60^\circ$; д) $\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ$; з) $(\sin 45^\circ)^6$;
 в) $\sin 45^\circ : \sin 60^\circ$; е) $\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ$; и) $\sin 45^\circ : \sin 30^\circ$.

591. Найдите значение выражения:

- а) $\sin 10^\circ$; г) $\sin 69^\circ$; ж) $\sin 1^\circ$;
 б) $\sin 27^\circ$; д) $\sin 76^\circ$; з) $\sin 89^\circ$;
 в) $\sin 43^\circ$; е) $\sin 85^\circ$; и) $\sin 3^\circ$.

592. Найдите острый угол, синус которого равен:

- а) 0,1736; в) 0,6561; д) 0,0175;
 б) 0,9703; г) 0,9945; е) 0,4384.

593. Найдите синусы и косинусы острых углов и сами углы треугольника по данным, приведенным на рисунке:

- а) 278; в) 280; д) 282;
 б) 279; г) 281; е) 283.

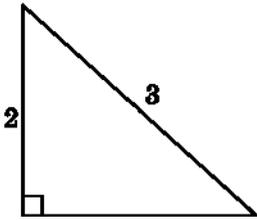


Рис. 278

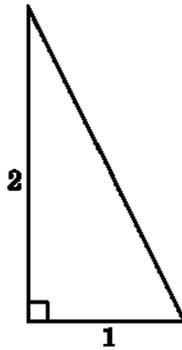


Рис. 279

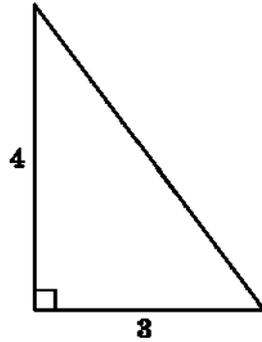


Рис. 280

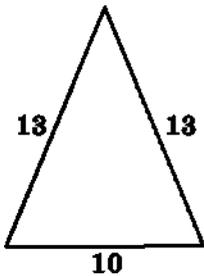


Рис. 281

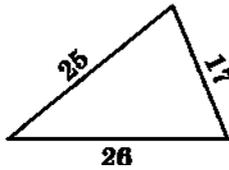


Рис. 282

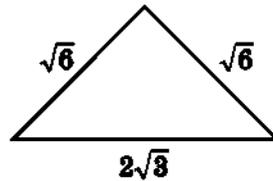


Рис. 283

594. Найдите косинус угла, учитывая, что его синус равен:

- а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{2}{5}$; г) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; д) $\frac{3}{5}$; е) а.

595. Найдите синус угла, учитывая, что его косинус равен:

- а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; в) $\frac{1}{10}$; г) 0,2; д) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; е) а.

596. Определите, могут ли синус и косинус одного угла быть равными соответственно:

- а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{8}}{2}$; б) $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$; в) $\frac{1}{8}$ и $\frac{\sqrt{5}}{3}$; г) $\frac{8}{17}$ и $\frac{15}{17}$.

597. Определите, при каких значениях переменной a синус и косинус одного угла соответственно равны:

- а) a и a ; б) a и $2a$; в) a и $\frac{1}{a}$; г) $\frac{a^2-1}{a^2+1}$ и $\frac{2a}{a^2+1}$.

598. Докажите, что:

- а) если два положительных числа a и b удовлетворяют равенству $a^2 + b^2 = 1$, то одно из них может быть значением синуса некоторого угла, а другое — значением косинуса этого угла;
б) значения синуса и косинуса острого угла прямоугольного треугольника принадлежат промежутку $(0; 1)$;
в) значения тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника принадлежат промежутку $(0; +\infty)$.

599. Найдите границы изменения $\cos \alpha$, учитывая, что $\sin \alpha$:

- а) меньше $\frac{1}{2}$; в) принадлежит промежутку $\left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right]$;
б) больше $\frac{1}{3}$; г) изменяется от b до $2b$.

600. Определите, для каких углов β :

- а) $\cos \beta = \sin \beta$; в) $\cos \beta > \sin \beta$; д) $\cos \beta \geq \sin \beta$;
б) $\cos \beta < \sin \beta$; г) $\cos \beta \leq \sin \beta$; е) $\cos \beta \neq \sin \beta$.

601. Найдите значение выражения:

- а) $\cos 9^\circ$; в) $\cos 47^\circ$; д) $\cos 66^\circ$;
б) $\cos 37^\circ$; г) $\cos 71^\circ$; е) $\cos 87^\circ$.

602. Найдите угол, косинус которого равен:

- а) 0,1908; в) 0,2588; д) 0,0175;
б) 0,9925; г) 0,9994; е) 0,4540.

603. Запишите формулу, которая связывает тангенс с синусом и косинусом, и выразите из нее синус. Используя полученную формулу, докажите, что тангенс острого угла больше синуса этого угла. Какую гипотезу вы можете выдвинуть о величине косинуса и котангенса одного угла? Как ее обосновать?

604. Используя определение тангенса, докажите, что квадрат высоты BB_1 , проведенной к гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC , равен произведению проекций AB_1 и CB_1 катетов AB и CB на гипотенузу AC .

605. Докажите, что произведение тангенсов, а также произведение котангенсов острых углов прямоугольного треугольника равно единице.

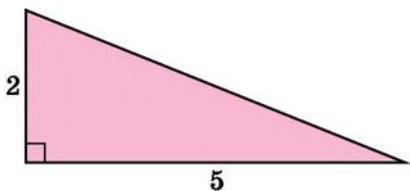


Рис. 284

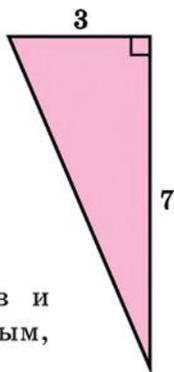


Рис. 285

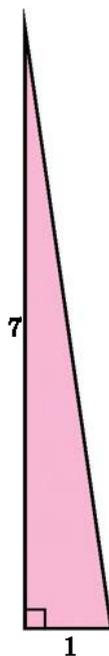


Рис. 286

606. Найдите тангенсы углов и сами углы треугольника по данным, приведенным на рисунке:

- а) 284; б) 285; в) 286.

607. Ребро SB треугольной пирамиды $SABC$ перпендикулярно ребрам BA и BC , а ребро AC перпендикулярно ребрам CB и CS (рис. 287). Ребра SB , BC и CA соответственно равны 2, 2 и 4. Найдите:

- а) полную поверхность пирамиды;
б) углы каждой грани пирамиды.

608. В основании четырехугольной пирамиды $SLKMN$ лежит прямоугольник $LKMN$ (рис. 288). Ребро SL перпендикулярно ребрам LK и LN , а также отрезку LM , ребро MK — ребру KS , ребро NM — ребру NS , $SL = a$, $\angle LSM = 60^\circ$, а $\angle MSN = 30^\circ$. Найдите:

- а) полную поверхность пирамиды;
б) углы каждой грани пирамиды.

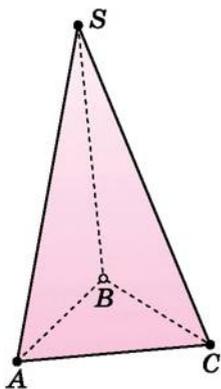


Рис. 287

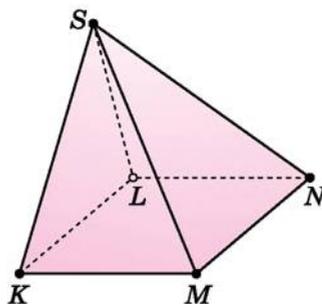


Рис. 288

609. Найдите недостающие числа в таблице, учитывая, что a , b и c — соответственно катеты и гипотенуза прямо-угольного треугольника с прямым углом C .

a	2,4	27	0,35	212					
b	4,5				9,13	0,976	123		
c		65			15,7			7,12	34,8
$\angle A$			20°			44°		11°	
$\angle B$				72°			88°		33°

610. Запишите многочленом выражение:

- а) $x(1 - 3x)^2 - (x^2 - 2)(2 - x) + 3x^3(4x - 1)$;
 б) $(c^2 - 2c)^2 - c(5 - c)(c + 4) - 4c(2c^3 - 5)$;
 в) $(y - a)^3(y - a) - (y - a)^2(ay + a^2)$;
 г) $(b^2 - b + 1)(b^2 + b + 1)(b^4 - b^2 + 1)$;
 д) $(i + j + k)(i + j - k)(i - j + k)(i - j - k)$;
 е) $(2 + u^2 + 3u^3 + v^2)(2 + u^2 - 3u^3 - v^2)$.

611. Докажите тождество:

- а) $4(1 - a)^2 - 5(1 - a)(1 + a) - (3 + a)^2 = 2(4a^2 - 7a - 5)$;
 б) $(x - 2y)(4y + 2x) + 2y(x + 2y) - 2y(x - 2y) = 2x^2$.

612. Разложите на множители выражение:

- а) $a^6 - 2a^3b + b^2$;
 б) $4c^{10} + 20c^5y^6 + 25y^{12}$;
 в) $125m^3n^6 + 216k^6l^3$;
 г) $216d^6f^3 - 125e^3h^9$;
 д) $8i^3 - 60i^2j + 150ij^2 - 125j^3$;
 е) $8p^3 + 72p^2q + 216pq^2 + 216q^3$;
 ж) $u^{12} + u^{10} - u^7 + 2u^6 - u^5 - 2u^{11}$;
 з) $g^2h^2 + b^2c^2 - b^2g^2 - c^2h^2$.

613. Решите уравнение:

- а) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) - a(a + 3)(a - 3) = 53$;
 б) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - x(x - 5)(x + 5) = 48$;
 в) $(3b + 1)(9b^2 - 3b + 1) - 9b(3b^2 - 5) = 136$;
 г) $(2u - 3)(4u^2 + 6u + 9) - 4u(2u^2 - 11) = 226$.

614. Выделите точный квадрат:

- а) $x^2 + 2x$;
 б) $x^2 - 6x$;
 в) $x^2 + 3x + 3$;
 г) $4x^2 + 6x - 1$;
 д) $-x^2 + 6x + 9$;
 е) $-3x^2 - 6x + 1$.

615. Река Дива вытекает из озера Урада, протекает через озера Атолово, Турасы, Березовское, Паульское и впадает в озеро Яново. Эти озера — часть Ушачской группы озер. Площадь Атолова относится к площади Турасов как $410 : 37$, а суммарная их площадь равна $8,94 \text{ км}^2$. Найдите площади озер Урада, Атолово, Турасы в отдельности, учитывая, что отношение площадей Урады и Атолова равно $\frac{38}{205}$.

616. Объем воды Паульского озера относится к объему воды Березовского озера как $535 : 253$, а объем воды последнего к объему воды озера Яново как $23 : 76$. Найдите, сколько воды в каждом из этих озер, учитывая, что воды в Янове на $15,05 \text{ млн м}^3$ больше, чем в Паульском.

617. Есть отходы стали с содержанием никеля 5% и 40% . В какой пропорции нужно их взять, чтобы получить сплав с содержанием никеля 30% ?

* * *

618. Канавки разделяют плитку шоколада на 4×5 равных прямоугольников (рис. 289). Какое наименьшее количество прямолинейных разломов нужно сделать, чтобы получить этих 4×5 равных частей? (За один раз ломается только один кусочек.) А какое наибольшее количество? Как вы объясните полученный результат?



Рис. 289

619. Докажите, что число $2005 \cdot 2006 \times \times 2007 \cdot 2009 \cdot 2010 \cdot 2011 + 36$ является точным квадратом.

620. Куб с ребром 3 см нужно разрезать на кубики с ребром 1 см . Какое наименьшее количество плоских разрезов понадобится для этого, если после каждого разрезания полученные части можно складывать по своему желанию?



раздел

Квадратные уравнения

18. Квадратное уравнение

А. Пример 1. Один катет прямоугольного треугольника на 7 см больше другого и на 1 см меньше гипотенузы. Найдите стороны треугольника.

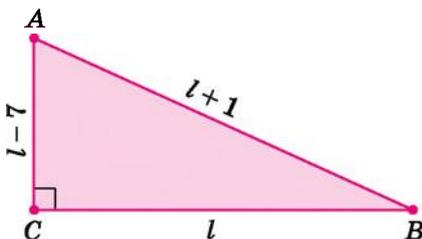


Рис. 290

Пусть длина большего катета равна l см, тогда длина меньшего катета — $(l - 7)$ см, а гипотенузы — $(l + 1)$ см (рис. 290). По теореме Пифагора можем записать:

$$l^2 + (l - 7)^2 = (l + 1)^2.$$

Раскрыв скобки и приводя подобные, получаем:

$$\begin{aligned} l^2 + l^2 - 14l + 49 &= l^2 + 2l + 1; \\ l^2 - 16l + 48 &= 0. \end{aligned}$$

Разложим многочлен в левой части уравнения на множители способом группировки:

$$\begin{aligned} l^2 - 16l + 48 &= l^2 - 4l - 12l + 48 = \\ &= l(l - 4) - 12(l - 4) = (l - 4)(l - 12). \end{aligned}$$

Значит, полученное уравнение равносильно уравнению

$$(l - 4)(l - 12) = 0,$$

корнями которого являются числа 4 и 12.

Если длина большего катета равна 4 см, то тогда длина меньшего составляет $4 \text{ см} - 7 \text{ см} = -3 \text{ см}$. Но длина отрезка не может быть отрицательной. Поэтому корень 4 нужно отбросить.

Если длина большего катета составляет 12 см, тогда меньший катет имеет длину $12 \text{ см} - 7 \text{ см} = 5 \text{ см}$, а гипотенуза — длину $12 \text{ см} + 1 \text{ см} = 13 \text{ см}$.

Ответ. Стороны треугольника равны 5 см, 12 см и 13 см.
При решении задачи мы получили уравнение

$$l^2 - 16l + 48 = 0,$$

в котором старшая степень переменной l — квадрат.

Определение 1. Квадратным уравнением называется уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a, b, c — некоторые числа, x — переменная, причем $a \neq 0$.

Числа a, b и c называют коэффициентами квадратного уравнения, число a — *первым*, или *старшим*, коэффициентом, число b — *вторым коэффициентом*, число c — *свободным членом*.

Поскольку левая часть $ax^2 + bx + c$ квадратного уравнения — многочлен второй степени, то его называют еще *уравнением второй степени*.

Если хотя бы один из коэффициентов b или c квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равен нулю, то его называют *неполным квадратным уравнением*.

В уравнении $5x^2 - 3x = 0$ нулю равен свободный член, в уравнении $-3x^2 + 12 = 0$ — второй коэффициент, в уравнении $27x^2 = 0$ — второй коэффициент и свободный член. Значит, это неполные квадратные уравнения.

Б. Рассмотрим, как решаются неполные квадратные уравнения.

Теорема 1. *Неполное квадратное уравнение $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$, имеет два корня: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{b}{a}$.*

Доказательство. Пусть дано неполное квадратное уравнение $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$. В левой части уравнения вынесем за скобки x :

$$x(ax + b) = 0.$$

Произведение $x(ax + b)$ равно нулю тогда и только тогда, когда равен нулю хотя бы один из множителей:

$$x = 0 \text{ или } ax + b = 0.$$

Поскольку $a \neq 0$, то

$$x = 0 \text{ или } x = -\frac{b}{a}.$$

Таким образом, неполное квадратное уравнение $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$, имеет два корня: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Пример 2. Решим уравнение $5x^2 - 7x = 0$.

Имеем:

$$\begin{aligned}5x^2 - 7x &= 0; \\x(5x - 7) &= 0; \\x = 0 \text{ или } 5x - 7 &= 0; \\x = 0 \text{ или } x &= \frac{7}{5}; \\x = 0 \text{ или } x &= 1,4.\end{aligned}$$

Ответ. $x_1 = 0$; $x_2 = 1,4$.

Теорема 2. *Неполное квадратное уравнение $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$, имеет два корня $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, когда $\frac{c}{a} < 0$; не имеет корней, когда $\frac{c}{a} > 0$.*

Доказательство. Пусть дано неполное квадратное уравнение $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$.

Разделим обе части уравнения на a : $x^2 + \frac{c}{a} = 0$.

Если $\frac{c}{a} > 0$, то уравнение не имеет корней, поскольку значение выражения в левой части не меньше положительного числа $\frac{c}{a}$.

Если $\frac{c}{a} < 0$, то $-\frac{c}{a} > 0$. Поэтому $-\frac{c}{a} = \left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2$. Учитывая это, запишем уравнение в виде:

$$\begin{aligned}x^2 - \left(-\frac{c}{a}\right) &= 0, \\ \text{или } x^2 - \left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2 &= 0, \\ \text{или } \left(x + \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x - \sqrt{-\frac{c}{a}}\right) &= 0; \\ x = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ или } x &= \sqrt{-\frac{c}{a}}.\end{aligned}$$

Ответ. $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Пример 3. Решим уравнение $-4x^2 + 49 = 0$.

Имеем:

$$\begin{aligned}-4x^2 + 49 &= 0; \\-4x^2 &= -49; \\x^2 &= \frac{49}{4}; \\x_1 = \sqrt{\frac{49}{4}}; \quad x_2 &= -\sqrt{\frac{49}{4}}; \\x_1 &= \frac{7}{2}; \quad x_2 = -\frac{7}{2}; \\x_1 &= 3,5; \quad x_2 = -3,5.\end{aligned}$$

Ответ. $x_1 = 3,5$; $x_2 = -3,5$.

Пример 4. Решим уравнение $6x^2 - 4 = 0$.

Имеем:

$$\begin{aligned}6x^2 - 4 &= 0; \\6x^2 &= 4; \\x^2 &= \frac{2}{3}; \\x_1 &= -\sqrt{\frac{2}{3}}; \quad x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

Ответ. $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}; x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Пример 5. Решим уравнение $3x^2 + 4 = 0$.

Имеем:

$$\begin{aligned}3x^2 + 4 &= 0; \\3x^2 &= -4; \\x^2 &= -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Поскольку число $-\frac{4}{3}$ меньше нуля, то уравнение $x^2 = -\frac{4}{3}$ не имеет корней.

Ответ. Корней нет.

Теорема 3. *Неполное квадратное уравнение $ax^2 = 0$ имеет один корень $x = 0$.*

Доказательство. Уравнение $ax^2 = 0$ равносильно уравнению $x^2 = 0$, которое имеет один корень $x = 0$.



1. Какое уравнение называют квадратным?

2. Какие числа называют коэффициентами квадратного уравнения? Какой коэффициент квадратного уравнения называют первым (старшим) коэффициентом; вторым коэффициентом; свободным членом?

3. Какие квадратные уравнения называют неполными квадратными уравнениями?

4. Как решается неполное квадратное уравнение $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$?

5. Как решается неполное квадратное уравнение $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$?

6. Как решается неполное квадратное уравнение $ax^2 = 0$?

621. Является ли квадратным уравнение:

а) $3a^2 - 11a + 7 = 0$;

в) $\frac{7}{12}m^2 - 234 = 0$;

б) $-3x^2 - 13x + 23 = 0$;

г) $10t - 56 = 0$?

622. Назовите коэффициенты квадратного уравнения:

а) $5x^2 + 8x - 7 = 0$;

в) $\frac{5}{16}u^2 - 2 = 0$;

б) $-3c^2 + 3c + 2,2 = 0$;

г) $6r^2 - 5r = 0$.

623. Запишите квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, в котором:

а) $a = 3, b = 4, c = 5$;

в) $a = -9, b = 0, c = 0$;

б) $a = -2, b = 0, c = -9$;

г) $a = 1, b = -6, c = 0$.

624. К виду $ax^2 + bx + c = 0$ приведите уравнение:

а) $x(x + 4) = 7$;

в) $4c(c - 3) = c(c + 1) - c^2$;

б) $(y - 5)(y - 6) = 2$;

г) $8(l^2 - 2) = 2(l + 2)(l - 2)$.

625. Докажите, что данное уравнение сводится к квадратному:

а) $(3z + 2)(3z - 2) = z(2z + 1)$;

б) $(t + 3)(t + 4) = (4t - 1)(t - 2)$;

в) $(k - 7)(2 + 5k) = 2(k - 3)(k + 4)$;

г) $8(b - 1)^3 = (2b + 1)^3$.

626. Определите, какие из чисел $-3, -1, 0, 1, 3$ являются корнями уравнения:

а) $x^2 - 9 = 0$;

в) $b^2 - 2b - 3 = 0$;

д) $v^2 + v - 12 = 0$;

б) $a^2 - a = 0$;

г) $(g - 3)(1 + g) = 0$;

е) $p^2 - 2p - 8 = 0$.

627. Равносильным квадратным уравнением замените уравнение:

а) $5n^2 - 3n(2n - 1) = 6$;

б) $-4r(r + 3) = 3(r + 7) - 11$;

в) $3s(2 - 3s) = 3 - (s + 10)(2s - 5)$;

г) $(5 - 2k)(4 + 2k) = (k + 9)(k - 7)$.

628. Сколько корней имеет уравнение $c^2 = 25$? Запишите их. Какой из них является арифметическим корнем из числа 25? Как второй корень выражается через арифметический корень?

629. Решите уравнение:

а) $a^2 = 1$;

е) $t^2 = \frac{25}{36}$;

б) $y^2 = \frac{1}{4}$;

ж) $z^2 = 100$;

в) $c^2 = 9$;

з) $r^2 = \frac{9}{100}$;

г) $v^2 = \frac{9}{49}$;

и) $v^2 = 400$;

д) $x^2 = 0$;

к) $p^2 = \frac{121}{900}$.

630. Решите уравнение:

а) $m^2 = 6,25$;

г) $p^2 = 1,44$;

ж) $a^2 = 6\frac{30}{49}$;

б) $y^2 - 169 = 0$;

д) $k^2 = 2\frac{7}{9}$;

з) $g^2 = 5\frac{1}{16}$;

в) $b^2 - \frac{49}{81} = 0$;

е) $\frac{s^2}{100} = 0$;

и) $v^2 + 18 = 0$.

631. Разложением на множители левой части решите квадратное уравнение:

- а) $a^2 - a = 0$; в) $2c^2 + 5c = 0$; д) $e^2 - 6e + 9 = 0$;
б) $b^2 + 3b = 0$; г) $5d^2 - 3d = 0$; е) $f^2 + 4f + 4 = 0$.

632. С точностью до трех знаков с помощью калькулятора найдите корень уравнения:

- а) $x^2 = 9,15$; в) $r^2 - 7091 = 0$;
б) $a^2 = 29$; г) $u^2 - 0,0471 = 0$.

633. Решите уравнение:

- а) $9a^2 - 4 = 0$; в) $-0,11b^2 + 11 = 0$; д) $5c^2 + 20 = 0$;
б) $3z^2 - 2 = 0$; г) $11y^2 - 22y = 0$; е) $3x^2 - 9 = 0$.

634. Решите уравнение:

- а) $3u^2 - 4u = 0$; в) $-5y - 9y^2 = 0$;
б) $10r^2 + 9r = 0$; г) $8t^2 - t = 0$.

635. Решите уравнение:

- а) $7u^2 - 4u + 11 = 5u^2 + u + 11$;
б) $-6v^2 + 9v + 11 = 9v - 34$;
в) $(m + 1)(m^2 - m + 1) - m^2(m + 4) = 0$.

636. Решите уравнение:

- а) $g^2 + 4 = (g + 4)(2g + 1)$; в) $8j^2 - (j + 1)^2 = -2(j - 3)$;
б) $4i - (i + 2)^2 = 5i^2 - 7$; г) $(7l + 1)(l - 3) = -4(6 + 5l)$.

637. Докажите, что уравнения $x^2 = 9$ и $|x| = 3$ равносильны.

638. Подберите число a так, чтобы левая часть уравнения была квадратом суммы или разности, и решите полученное уравнение:

- а) $z^2 + az + 4 = 0$; б) $x^2 - ax + 16 = 0$; в) $4u^2 - 4u + a = 0$.

639. Докажите, что если число m является корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $c \neq 0$, то число $\frac{1}{m}$ является корнем уравнения $cx^2 + bx + a = 0$.

640. Если от квадрата отрезать прямоугольный треугольник площадью 44 см^2 , то останется пятиугольная часть площадью 100 см^2 . Найдите:

- а) сторону квадрата;
б) стороны треугольника и пятиугольника, если катеты треугольника отличаются на 3 см .

641. Площадь круга на 26 см^2 меньше площади квадрата. Найдите сторону квадрата, учитывая, что площадь круга равна 49 см^2 .

642. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна 8 см . Найдите его катеты.

643. Сумма квадратов трех последовательных натуральных чисел равна 77 . Найдите эти числа.

644. Найдите два натуральных числа, учитывая, что:

- произведение этих чисел составляет 75% квадрата большего из них;
- произведение этих чисел в $1,1$ раза больше квадрата меньшего из них;
- произведение этих чисел в $1,5$ раза меньше квадрата меньшего из них.

645. Катеты прямоугольного треугольника равны 2 см и 4 см . Найдите его гипотенузу и площадь.

646. На рисунке 291 показана развертка конуса, площадь основания которого составляет 314 см^2 , а угол AOB развертки равен 75° . Найдите образующую AO конуса.

647. На рисунке 292 прямая BE при пересечении с прямыми AB и CE образует внутренние односторонние углы, равные соответственно 74° и 106° . Прямая BC пересекает прямую CE под углом в 50° . Луч CA является биссектрисой угла BCE . Найдите углы треугольника ABC .

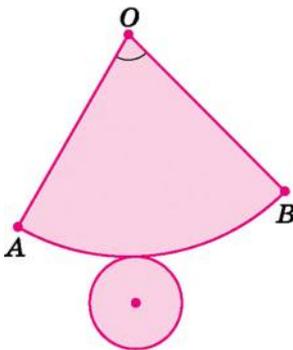


Рис. 291

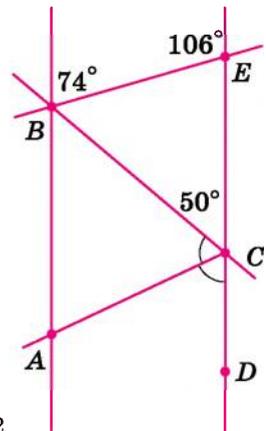


Рис. 292

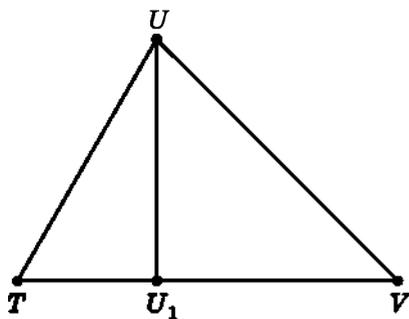


Рис. 293

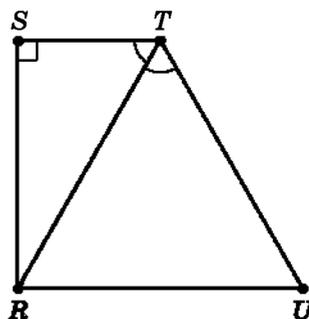


Рис. 294

648. Высота UU_1 треугольника TUV образует со стороной TU угол в 30° (рис. 293). Стороны TU и UV равны соответственно 6 дм и $3\sqrt{6}$ дм. Найдите:

- а) стороны и углы треугольника TUV ;
- б) площадь треугольника TUV .

649. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом B и углом D в 45° диагональ AC равна $2\sqrt{2}$ см и перпендикулярна стороне CD . Найдите:

- а) стороны и углы трапеции $ABCD$;
- б) площадь трапеции $ABCD$.

650. В прямоугольной трапеции $RSTU$ с прямым углом S диагональ RT составляет со стороной RS угол в 30° и лежит на биссектрисе угла STU , а боковая сторона TU равна 10 м (рис. 294). Найдите:

- а) стороны и углы трапеции $RSTU$;
- б) площадь трапеции $RSTU$.

* * *

651. Напомним, что $[a]$ обозначает целую часть числа a , т. е. наибольшее из целых чисел, не превосходящих a . Так, $[2] = 2$, $[4,35] = 4$, $[-0,5] = -1$. Найдите все числа x , для которых:

- а) $[5x - 3] = 2$; б) $[5x - 3] = -2$.

652. Докажите, что произведение ста последовательных натуральных чисел не может быть сотой степенью натурального числа.

653. Докажите, что среди любых пяти человек есть два с одинаковым количеством знакомых среди этих пяти человек.

19. Формулы корней квадратного уравнения

А. Квадратное уравнение можно решить *методом выделения полного квадрата*.

Пример 1. Решим уравнение

$$2x^2 + 3x - 2 = 0.$$

Перенесем слагаемое -2 из левой части уравнения в правую:

$$2x^2 + 3x = 2.$$

Разделим все члены уравнения на старший коэффициент 2:

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 1.$$

В выражении $x^2 + \frac{3}{2}x$ первое слагаемое является квадратом числа x . Второе слагаемое представим удвоенным произведением числа x и еще одного числа:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{4} = 1.$$

К левой и правой частям уравнения прибавим квадрат числа $\frac{3}{4}$:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

Далее будем получать:

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16};$$

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16};$$

$$x + \frac{3}{4} = \sqrt{\frac{25}{16}} \quad \text{или} \quad x + \frac{3}{4} = -\sqrt{\frac{25}{16}};$$

$$x + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \quad \text{или} \quad x + \frac{3}{4} = -\frac{5}{4};$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad x = -2.$$

Ответ. $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Решим квадратное уравнение в общем виде:

$$ax^2 + bx + c = 0; \tag{1}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0;$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a};$$

$$x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} = -\frac{c}{a};$$

$$\begin{aligned}
 x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}; \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}; \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Дальнейшее решение зависит от того, каким по знаку будет выражение $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Поскольку по условию $a \neq 0$, то знаменатель $4a^2$ является положительным числом. Поэтому знак дроби определяется его числителем $b^2 - 4ac$.

Выражение $b^2 - 4ac$ называют **дискриминантом** (от лат. *discriminantis* — отличающий) **квадратного уравнения** и обозначают D , т. е.

$$D = b^2 - 4ac.$$

Учитывая введенное определение, уравнение (2), равносильное уравнению (1), можно записать так:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}. \tag{3}$$

Пусть $D > 0$. Тогда получаем:

$$\begin{aligned}
 x + \frac{b}{2a} &= -\frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \text{или} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}; \\
 x &= -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \text{или} \quad x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}; \\
 x &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{или} \quad x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет **два корня**:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Полученные формулы корней квадратного уравнения объединяют в одной записи:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{где } D = b^2 - 4ac,$$

которую называют **формулой корней квадратного уравнения**.

Корни квадратного уравнения равны дроби, числитель которой — второй коэффициент, взятый с противоположным знаком, плюс/минус квадратный корень из дискриминанта, а знаменатель — удвоенный старший коэффициент.

Пусть $D = 0$. Тогда уравнение (3) запишется так:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Значит,

$$x + \frac{b}{2a} = 0;$$

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Таким образом, если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Понятно, что такой же результат получится и по формуле корней квадратного уравнения. Действительно, если $D = 0$, то

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}, \text{ или } x = -\frac{b}{2a}.$$

Пусть $D < 0$. Тогда значение дроби $\frac{D}{4a^2}$ отрицательное, равенство $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$ невозможно ни при каком значении переменной x , и поэтому уравнение (1) не имеет корней.

Таким образом, если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет корней.

Пример 2. Решим уравнение $3x^2 + 11x + 6 = 0$.

Найдем дискриминант D :

$$D = 11^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 121 - 72 = 49; D > 0.$$

По формуле корней квадратного уравнения находим:

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-11 \pm 7}{6};$$

$$x_1 = \frac{-11-7}{6} = -3; x_2 = \frac{-11+7}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Ответ. $x_1 = -3; x_2 = -\frac{2}{3}$.

Пример 3. Решим уравнение $4a^2 - 4a + 1 = 0$.

Имеем:

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0; D = 0.$$

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $a = \frac{1}{2}$.

Пример 4. Решим уравнение $5m^2 - 7m + 11 = 0$.

Имеем:

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 11 = 49 - 220; D < 0.$$

Ответ. Корней нет.

Пример 5. Решим уравнение $3s^2 + 6s - 5 = 0$.

Имеем:

$$D = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 36 + 60 = 96; D > 0.$$

$$s = \frac{-6 \pm \sqrt{96}}{6} = \frac{-6 \pm \sqrt{16 \cdot 6}}{6} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{6}}{6};$$

$$s_1 = \frac{-6 - 4\sqrt{6}}{6} = \frac{-3 - 2\sqrt{6}}{3} = -1 - \frac{2}{3}\sqrt{6};$$

$$s_2 = \frac{-6 + 4\sqrt{6}}{6} = \frac{-3 + 2\sqrt{6}}{3} = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

Ответ. $s_1 = -1 - \frac{2}{3}\sqrt{6}$; $s_2 = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{6}$.

Б. Рассмотрим два частных вида квадратного уравнения.

▲ Пусть в квадратном уравнении старший коэффициент равен единице:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Такие уравнения называют **приведенными квадратными уравнениями**.

Учитывая, что здесь $a = 1$, $b = p$, $c = q$, из формулы корней квадратного уравнения получаем:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}} = \\ &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \end{aligned}$$

Таким образом, корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ можно находить по формуле

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Корни приведенного квадратного уравнения равны половине второго коэффициента, взятого с противоположным знаком, плюс/минус квадратный корень из квадрата этой половины без свободного члена. ▲

Пример 6. Решим уравнение $t^2 + 7t + 10 = 0$.

Имеем:

$$t = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-40}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{3}{2};$$
$$t_1 = -\frac{7}{2} - \frac{3}{2} = -5;$$
$$t_2 = -\frac{7}{2} + \frac{3}{2} = -2.$$

Ответ. $t_1 = -5$; $t_2 = -2$.

Пример 7. Решим уравнение

$$a^2 - 6a + 18 = 0.$$

Имеем:

$$a = -3 \pm \sqrt{9 - 18} = -3 \pm \sqrt{-9}.$$

Поскольку выражение $\sqrt{-9}$ не имеет значения, то уравнение не имеет корней.

Ответ. Корней нет.

В. ▲ Пусть в квадратном уравнении второй коэффициент является четным числом: $b = 2m$, т. е. уравнение имеет вид

$$ax^2 + 2mx + c = 0.$$

Из формулы корней квадратного уравнения получаем:

$$x = \frac{-2m \pm \sqrt{4m^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2m \pm 2\sqrt{m^2 - ac}}{2a} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a}.$$

Таким образом, корни квадратного уравнения $ax^2 + 2mx + c = 0$ можно находить по формуле

$$x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a}. \blacktriangle$$

Пример 8. Решим уравнение $3u^2 - 14u + 8 = 0$.

Имеем:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 3 \cdot 8}}{3} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{3} = \frac{7 \pm 5}{3};$$
$$x_1 = \frac{7-5}{3} = \frac{2}{3}; \quad x_2 = \frac{7+5}{3} = 4.$$

Ответ. $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = 4$.

Некоторые виды квадратных уравнений умел решать среднеазиатский математик Мухаммед аль-Хорезми (787 — около 850). Соединение отдельных методов решения разных видов квадратных уравнений сделал немецкий математик Михель Штифель (1487—1567). Близкое к современному решение квадратного уравнения дали итальянский математик и инженер Раффаэле Бомбелли (около 1530—1572) и нидерландский ученый и инженер Симон Стевин (1548—1620).

Правообладатель Народная асвета

1. Какое выражение называют дискриминантом квадратного уравнения?
2. Запишите формулу корней квадратного уравнения. Прочитайте ее словами.
3. Сколько корней имеет квадратное уравнение в зависимости от его дискриминанта?
4. Какое квадратное уравнение называют приведенным?
5. Запишите формулу корней приведенного квадратного уравнения. Прочитайте ее словами.
6. Запишите формулу корней квадратного уравнения со вторым членом коэффициентом.

654. Методом выделения полного квадрата решите уравнение:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| а) $x^2 + x - 12 = 0$; | ж) $6u^2 + 13u + 6 = 0$; |
| б) $2a^2 - 11a + 5 = 0$; | з) $2d^2 - 9d + 9 = 0$; |
| в) $y^2 + y - 6 = 0$; | и) $6v^2 - v - 1 = 0$; |
| г) $b^2 + 7b - 8 = 0$; | к) $e^2 + 5e - 24 = 0$; |
| д) $2z^2 - 3z + 1 = 0$; | л) $4m^2 + 4m + 1 = 0$; |
| е) $2c^2 + 5c + 3 = 0$; | м) $4p^2 - 9p - 9 = 0$. |

655. Вычислив дискриминант, укажите количество корней квадратного уравнения:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; | г) $3t^2 + 2t + 9 = 0$; |
| б) $2m^2 + m + 2 = 0$; | д) $25a^2 + 20a + 4 = 0$; |
| в) $4y^2 - 12y + 9 = 0$; | е) $3m^2 - 20m + 25 = 0$. |

656. Решите уравнение:

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| а) $2x^2 + 7x - 15 = 0$; | ж) $6e^2 - 17e + 7 = 0$; |
| б) $9a^2 + 10a + 1 = 0$; | з) $d^2 + 3d - 88 = 0$; |
| в) $y^2 - 2y - 35 = 0$; | и) $7f^2 + 5f + 10 = 0$; |
| г) $b^2 - 3b - 18 = 0$; | к) $r^2 - 11r + 36 = 0$; |
| д) $z^2 - 7z + 13 = 0$; | л) $s^2 - 3s - 40 = 0$; |
| е) $36t^2 + 60t + 25 = 0$; | м) $8m^2 - 22m + 15 = 0$. |

657. При каких значениях переменной:

- а) трехчлен $x^2 - 12x + 35$ принимает значение, равное 15;
- б) значения многочленов $3y^2 + 5y - 20$ и $y^2 - 2y + 10$ равны;
- в) значение трехчлена $b^2 - 4b - 11$ равно значению двучлена $b - 5$;
- г) значение двучлена $t^2 + 4$ равно значению трехчлена $13t^2 + 7t - 8$?

658. Решите уравнение:

а) $x^2 - 11x + 24 = 0$;

б) $a^2 - 4a - 5 = 0$;

в) $m^2 + 9m + 14 = 0$;

г) $y^2 - 14y + 48 = 0$;

д) $4 + 4t = t^2 + t$;

е) $33 - 11n + n^2 = 3n$;

ж) $c^2 + c + 10 = -10c$;

з) $6 - 2k = k^2 - 3k$;

и) $22s = 6 - 8s^2$;

к) $g^2 + 45 = 14g$;

л) $5u + 2 = 3u^2$;

м) $v^2 + 30 + 11v = 0$.

659. Решите уравнение:

а) $2m^2 - 5m + 2 = 0$;

б) $6n^2 + 5n + 1 = 0$;

в) $2p^2 - 3p - 2 = 0$;

г) $6q^2 - 6q - 1 = 0$;

д) $2a^2 - 7a + 3 = 0$;

е) $10b^2 - 9b - 1 = 0$;

ж) $2c^2 - 3c + 9 = 0$;

з) $30d^2 - 7d - 1 = 0$;

и) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;

к) $10u^2 - 6u + 0,9 = 0$;

л) $9y^2 + 6y + 4 = 0$;

м) $10v^2 + 6v + 1,1 = 0$.

660. Решите уравнение:

а) $36u^2 + 12u + 1 = 0$;

б) $5v^2 - 9v + 4 = 0$;

в) $3w^2 - 32w + 80 = 0$;

г) $6x^2 - 7x + 10 = 0$;

д) $y^2 + 34y + 289 = 0$;

е) $-k^2 - 15k + 34 = 0$;

ж) $2l^2 - 7l + 3 = 0$;

з) $2m^2 - 5m - 3 = 0$;

и) $6a^2 - 7a + 8 = 0$;

к) $15b^2 + 7b - 15 = 0$;

л) $20c^2 - 103c + 132 = 0$;

м) $14d^2 - 19d + 10 = 0$.

661. Решите приведенное квадратное уравнение:

а) $x^2 - 3x + 2 = 0$;

б) $y^2 - 12y + 11 = 0$;

в) $z^2 + 3z + 2 = 0$;

г) $a^2 + a - 2 = 0$;

д) $b^2 + 10b - 11 = 0$;

е) $c^2 - c - 2 = 0$;

ж) $d^2 - 10d + 25 = 0$;

з) $e^2 - 6e + 13 = 0$;

и) $f^2 + 18f + 81 = 0$;

к) $g^2 - 8g + 17 = 0$;

л) $h^2 - 11h + 24 = 0$;

м) $k^2 + 11k + 24 = 0$.

662. Решите приведенное квадратное уравнение:

а) $a^2 - 8a + 15 = 0$;

б) $b^2 + b - 56 = 0$;

в) $c^2 + c - 20 = 0$;

г) $d^2 + 16d + 55 = 0$;

д) $i^2 - 21i + 98 = 0$;

е) $j^2 + 22j + 120 = 0$;

ж) $k^2 + 11k - 180 = 0$;

з) $l^2 - 16l - 17 = 0$;

и) $m^2 - 14m + 62 = 0$;

к) $n^2 - 32n + 256 = 0$;

л) $p^2 - 50p + 600 = 0$;

м) $q^2 + 29q + 190 = 0$.

663. Решите уравнение со вторым четным коэффициентом:

- а) $3m^2 - 14m + 16 = 0$; ж) $15b^2 - 22b - 37 = 0$;
б) $n^2 - 12n + 32 = 0$; з) $2c^2 - 4c + 17 = 0$;
в) $5k^2 - 16k + 3 = 0$; и) $15d^2 + 22d - 37 = 0$;
г) $x^2 - 4x - 21 = 0$; к) $3l^2 + 2l + 10 = 0$;
д) $y^2 - 2y - 80 = 0$; л) $7m^2 + 20m + 12 = 0$;
е) $a^2 - 22a - 48 = 0$; м) $15n^2 - 8n - 12 = 0$.

664. Решите уравнение:

- а) $9x = 5x^2 - 2$; ж) $d^2 + 1 = 52d - 575$;
б) $14 - y^2 = 5y$; з) $15f^2 - 29 = 22f + 8$;
в) $9 - z^2 = -6z$; и) $10p = 25p^2 + 1$;
г) $a - 6 = a^2 - 26$; к) $100r^2 + 300r = 14r - 21r^2 - 169$;
д) $6b^2 + 10b = -25 - 15b$; л) $300s^2 + 100s + 50 = 41 - 20s - 100s^2$;
е) $3c^2 - 8 = 4c - 12$; м) $225t^2 - 200t + 70 = 40t + 6$.

665. Решите уравнение:

- а) $(2a - 1)(a - 2) = 5$; ж) $(7 + k)^2 + (7 - k)^2 = 135$;
б) $(3t - 2)(2t - 3) = 4$; з) $(2l - 4)(l + 3) = (l - 4)(l + 6)$;
в) $(b - 3)^2 = 2(b + 9)$; и) $(2p + 1)(p - 5) = (p - 2)^2 - (5p - 1)$;
г) $(r + 5)^2 = 4(r + 10)$; к) $2q(2q + 3) - (q + 3)^2 = 0$;
д) $(m + 4)^2 = 40 + 3m$; л) $(r + 3)^2 + (r - 3)^2 = 10$;
е) $(n - 2)^2 + 48 = (2 - 3n)^2$; м) $(s + 3)^2 - (s + 2)^2 - (s + 1)^2 = 0$.

666. Решите уравнение:

- а) $\frac{a^2}{5} - \frac{2a}{3} = \frac{a + 5}{6}$;
б) $\frac{b(b - 7)}{3} - 1 = \frac{11b}{10} - \frac{b - 4}{3}$;
в) $\frac{m^2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{m}{3} + \frac{4}{5}$;
г) $\frac{n^2}{7} + 1\frac{1}{2} = \frac{n^2}{12} + 1\frac{1}{14}$;
д) $\frac{(c + 3)^2}{7} - \frac{(3c - 1)^2}{7} = \frac{(c - 2)(2c + 1)}{3}$;
е) $\frac{(p - 1)^2}{5} - \frac{3p^2 + 0,2p + 2,8}{10} - \frac{(p + 1)^2}{5} = 0$;
ж) $\frac{(i - 12)^2}{6} + \frac{i}{9} + \frac{i(i - 9)}{18} = \frac{(i - 14)^2}{2} + \frac{2i + 45}{9}$;
з) $\frac{(3 + 5j)^2}{4} + \frac{9j - 2}{5} + \frac{(j + 2)(2j + 7)}{4} = 0$.

667. Угол между высотами равнобедренного треугольника, проведенными к боковым сторонам, равен 40° . Найдите углы треугольника.

668. В четырехугольнике $PQRS$ равны суммы $\angle P + \angle R$ и $\angle Q + \angle S$ его противоположных углов. Найдите углы четырехугольника, учитывая, что угол P больше угла R на 40° , а угол Q больше угла S в три раза.

669. В равнобедренном треугольнике PQR основание PR повернули вокруг вершины P так, что его другой конец оказался в точке A на стороне QR (рис. 295). Затем так же повернули отрезок AP вокруг точки A , и конец P совпал с вершиной Q . Найдите углы треугольника PQR .

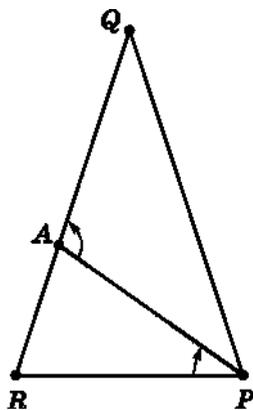


Рис. 295

670. В равнобедренном треугольнике ABC основание CA повернули вокруг вершины C так, что его другой конец оказался в точке M на стороне BA (рис. 296). Затем так же повернули отрезок MC вокруг точки M и получили точку L на стороне CB , повернув отрезок LM вокруг точки L , получили точку K на стороне AB . Когда же повернули отрезок KL вокруг точки K , то точка L совпала с вершиной B . Найдите углы треугольника ABC .

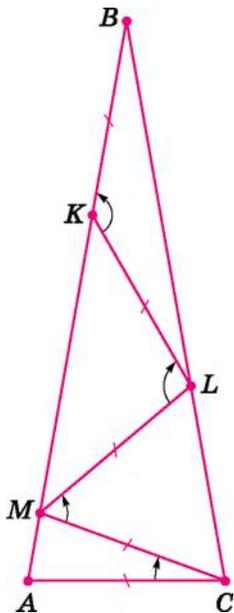


Рис. 296

671. Боковая сторона KL трапеции $KLMN$ перпендикулярна диагонали LN и образует с основанием KN угол в 30° (рис. 297). Найдите стороны трапеции, учитывая, что основание KN равно 6 дм и $LM = MN$.

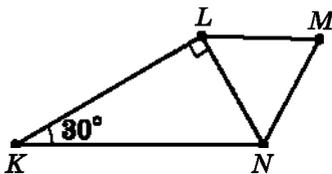


Рис. 297

672. При смешивании 40-процентного раствора кислоты с 10-процентным раствором получили 150 г 20-процентного раствора. Сколько граммов каждого раствора взяли?

673. Из 500 кг железной руды удалили 200 кг примесей, в результате чего процентное содержание железа повысилось на 20 процентных пунктов. Сколько железа осталось в руде, если примеси содержали 10 % железа?

674. Есть два сплава цинка, меди и олова. Первый сплав содержит 40 % олова, второй — 26 % меди, а процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаковое. Сплавив 15 кг первого сплава и 25 кг второго, получили новый сплав с 30-процентным содержанием цинка. Сколько килограммов олова содержит полученный сплав?

* * *

675. Напомним, что $[a]$ обозначает целую часть числа a , т. е. наибольшее из целых чисел, не превосходящих a . Так, $[-1,2] = -2$, $[1,2] = 1$, $[2] = 2$. Найдите все числа x , для которых:
а) $[5 - 2x] = 3$; б) $[5 - 2x] = -3$.

676. Есть краски шести цветов, в которые можно окрашивать грани куба (не обязательно каждую грань в свой цвет). Сколько различных раскрасок куба можно получить?

677. Запишите в квадратную таблицу последовательно числа от 1 до 25 (рис. 298). Поставьте перед десятью числами знаки «-» так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце таблицы стояло по два отрицательных числа. Сделали? Теперь найдите сумму всех чисел таблицы. Сколько у вас получилось? 65? Правильно! Как я угадал сумму?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Рис. 298

20. Уравнения, сводимые к квадратным

А. Левые и правые части уравнений, записанных в левом столбце таблицы на рисунке 299, являются рациональными выражениями. Такие уравнения называют *рациональными уравнениями*. Уравнения в правом столбце этой таблицы не являются рациональными, поскольку каждое из них, кроме

Уравнения	
<p><i>Целые</i></p> $2(x - 2) = 5x - 3$ $3a^2 - 5a - 2 = 0$	$\sqrt{a} + 1 = 5$
<p><i>Дробно-рациональные</i></p> $\frac{2}{3-y} - 1 = y + 4$ $\frac{b-6}{2b+3} = \frac{b+2}{b}$	$14 = \sqrt{x+11}$ $\sqrt{k^2+4} = k-1$ $x + \sqrt{x} = \sqrt{x-3}$
Рациональные	Иррациональные

Рис. 299

действий сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень, содержит действие извлечения корня из выражения с переменной: в первом уравнении — это \sqrt{a} , во втором — $\sqrt{x+11}$, в третьем — $\sqrt{k^2+4}$, в четвертом — \sqrt{x} и $\sqrt{x-3}$. Такие уравнения называют *иррациональными уравнениями*.

Левая и правая части первых двух уравнений — целые выражения. Такие уравнения называют *целыми уравнениями*. Третье и четвертое уравнения не являются целыми, поскольку каждое из них содержит действие деления на выражение с переменной: в третьем уравнении — на $3-y$, в четвертом — на $2b+3$ и на b . Такие уравнения называют *дробно-рациональными уравнениями*.

Каждое линейное уравнение $ax=b$ и каждое квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ являются целыми. Научимся решать еще один вид целых уравнений.

Пример 1. Решим уравнение $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$.

Выражение x^2 обозначим t :

$$x^2 = t.$$

Тогда $x^4 = (x^2)^2 = t^2$. Это позволяет данное уравнение записать в виде:

$$t^2 - 14t + 45 = 0.$$

Полученное уравнение является квадратным, и его корнями являются числа 5 и 9, т. е.

$$t = 5 \text{ или } t = 9.$$

После возвращения к переменной x получаем:

$$x^2 = 5 \text{ или } x^2 = 9.$$

Значит,

$$x_1 = -\sqrt{5}, x_2 = \sqrt{5}, x_3 = -3, x_4 = 3.$$

Ответ. $x_1 = -\sqrt{5}; x_2 = \sqrt{5}; x_3 = -3; x_4 = 3.$

Определение 2. Уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

где a, b и c — некоторые числа, x — переменная, причем $a \neq 0$, называется биквадратным уравнением.

Биквадратное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$ заменой $x^2 = t$ сводится к квадратному.

Пример 2. Решим уравнение $9s^4 + 26s^2 - 3 = 0$.

Пусть $s^2 = a$. Тогда

$$9a^2 + 26a - 3 = 0.$$

Отсюда

$$a = -3 \text{ или } a = \frac{1}{9}.$$

Значит,

$$s^2 = -3 \text{ или } s^2 = \frac{1}{9}.$$

Уравнение $s^2 = -3$ не имеет корней. Корнями уравнения $s^2 = \frac{1}{9}$ являются числа $-\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

Ответ. $s_1 = -\frac{1}{3}; s_2 = \frac{1}{3}.$

С помощью замены можно решать и некоторые другие уравнения.

Пример 3. Решим уравнение $3t^2 - 7|t| + 2 = 0$.

Пусть $|t| = y$. Тогда $t^2 = |t|^2 = y^2$. Это позволяет данное уравнение заменить уравнением

$$3y^2 - 7y + 2 = 0,$$

корнями которого являются числа:

$$y_1 = \frac{1}{3}; y_2 = 2.$$

Вернемся к исходной переменной t . При $y = \frac{1}{3}$ получаем

$$|t| = \frac{1}{3}.$$

Это дает два корня:

$$t_1 = -\frac{1}{3}, t_2 = \frac{1}{3}.$$

Если $y = 2$, то

$$|t| = 2.$$

Это дает еще два корня:

$$t_3 = -2, t_4 = 2.$$

Ответ. $t_1 = -\frac{1}{3}$; $t_2 = \frac{1}{3}$; $t_3 = -2$; $t_4 = 2$.

Б. К квадратным уравнениям сводятся и некоторые дробно-рациональные уравнения.

Пример 4. Решим уравнение

$$\frac{y-2}{y-3} + \frac{4}{y} = \frac{y}{y^2-3y}. \quad (1)$$

Умножим левую и правую части уравнения на общий знаменатель $y(y-3)$ входящих в это уравнение дробей. Получаем:

$$\frac{\overbrace{y-2}}{y-3} + \frac{\overbrace{4}}{y} = \frac{\overbrace{1}}{y};$$
$$y(y-2) + 4(y-3) = y. \quad (2)$$

Каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2). Но поскольку мы умножали обе части уравнения (1) не на число, а на выражение с переменной, которое может иметь нулевое значение, то не обязательно каждый корень уравнения (2) будет корнем уравнения (1).

Решим уравнение (2):

$$y^2 - 2y + 4y - 12 = y;$$
$$y^2 + y - 12 = 0;$$
$$y_1 = -4, y_2 = 3.$$

Проверим, обращается ли в нуль знаменатель какой-либо дроби данного уравнения. При $y = -4$ ни один из знаменателей дробей не равен нулю, а при $y = 3$ знаменатели первой и третьей дробей равны нулю, поэтому число 3 не является корнем данного уравнения. Его называют *посторонним корнем*.

Ответ. $y = -4$.

При решении дробно-рациональных уравнений рекомендуется следующая последовательность действий:

- найти общий знаменатель входящих в уравнение дробей;

- умножить левую и правую части уравнения на этот общий знаменатель;

- решить полученное целое уравнение;
- исключить из полученных корней те числа, которые обращают в нуль знаменатель хотя бы одной из дробей данного уравнения.

Пример 5. Решим уравнение $\frac{5}{m-2} + \frac{1}{m+2} = \frac{16}{m-5}$.

Общим знаменателем дробей является выражение

$$(m-2)(m+2)(m-5).$$

Имеем:

$$\frac{\overbrace{5}^{(m+2)(m-5)}}{m-2} + \frac{\overbrace{1}^{(m-2)(m-5)}}{m+2} = \frac{\overbrace{16}^{(m-2)(m+2)}}{m-5};$$

$$5(m+2)(m-5) + (m-2)(m-5) = 16(m-2)(m+2);$$

$$5m^2 - 25m + 10m - 50 + m^2 - 5m - 2m + 10 = 16m^2 - 64;$$

$$-10m^2 - 22m + 24 = 0;$$

$$5m^2 + 11m - 12 = 0;$$

$$D = 121 + 240 = 361;$$

$$m = \frac{-11 \pm \sqrt{361}}{10};$$

$$m = \frac{-11 \pm 19}{10};$$

$$m_1 = -3, m_2 = \frac{4}{5}.$$

При $m = -3$ и при $m = \frac{4}{5}$ знаменатели дробей исходного уравнения не равны нулю.

Ответ. $m_1 = -3; m_2 = \frac{4}{5}$.

Пример 6. Решим уравнение $\frac{c}{c^2-4} - \frac{1}{c^2-2c} + \frac{c-4}{c^2+2c} = 0$.

Разложив знаменатели дробей на множители, получаем:

$$\frac{c}{(c-2)(c+2)} - \frac{1}{c(c-2)} + \frac{c-4}{c(c+2)} = 0.$$

Далее будем иметь:

$$\frac{\overbrace{c}^{c+2}}{c} - \frac{\overbrace{1}^{c+2}}{c(c-2)} + \frac{\overbrace{c-4}^{c-4}}{c(c+2)} = 0;$$

$$c^2 - c - 2 + c^2 - 6c + 8 = 0;$$

$$2c^2 - 7c + 6 = 0;$$

$$D = 49 - 48 = 1;$$

$$c = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{4};$$

$$c = \frac{7 \pm 1}{4};$$

$$c_1 = 1\frac{1}{2}, c_2 = 2.$$

Корень $c_2 = 2$ является посторонним, поскольку значение $c = 2$ превращает знаменатель исходного уравнения в 0.

Ответ. $c = 1\frac{1}{2}$.

- ❓ 1. Какое уравнение называется биквадратным? Как оно решается?
2. Как решается дробно-рациональное уравнение?

678. Решите уравнение:

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| а) $a^4 - 7a^2 + 12 = 0$; | ж) $64z^4 + 55z^2 - 9 = 0$; |
| б) $b^4 - 7b^2 - 8 = 0$; | з) $e^4 - 29e^2 + 100 = 0$; |
| в) $4x^4 - 8x^2 + 4 = 0$; | и) $2g^4 - 13g^2 + 18 = 0$; |
| г) $4y^4 - 5y^2 - 125 = 0$; | к) $3h^4 + 97h^2 - 396 = 0$; |
| д) $c^4 - 20c^2 + 64 = 0$; | л) $3m^4 + 28m^2 + 65 = 0$; |
| е) $4d^4 - 12d^2 + 5 = 0$; | м) $n^4 - 100 = 0$. |

679. Решите уравнение:

- | | |
|---|---|
| а) $(x - 1)^4 - 5(x - 1)^2 + 4 = 0$; | г) $(y + 5)^4 + 8(y + 5)^2 - 9 = 0$; |
| б) $(a - 2)^4 - 13(a - 2)^2 + 36 = 0$; | д) $(2t + 3)^4 + 3(2t + 3)^2 - 4 = 0$; |
| в) $(m + 3)^4 - 4(m + 3)^2 - 5 = 0$; | е) $(2z - 1)^4 - 5(2z - 1)^2 + 4 = 0$. |

680. Решите уравнение:

- | | |
|--|--|
| а) $\frac{a^2}{a+3} - \frac{a}{a+3} = 0$; | ж) $\frac{t^2 - 6t}{t-5} = \frac{5}{5-t}$; |
| б) $\frac{10}{b-3} - \frac{8}{b} = 1$; | з) $\frac{2}{l-5} + \frac{14}{l} = 3$; |
| в) $\frac{c^2}{c^2-4} = \frac{5c-6}{c^2-4}$; | и) $\frac{2p-1}{p-3} - \frac{5p-7}{p-1} = 0$; |
| г) $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+3} = \frac{3}{20}$; | к) $\frac{40}{q-20} - \frac{40}{q} = 1$; |
| д) $\frac{2m^2}{m-2} - \frac{7m+6}{2-m} = 0$; | л) $\frac{k-5}{k+3} = \frac{2k+3}{2k-1}$; |
| е) $\frac{1}{n+3} + \frac{1}{n-3} = \frac{5}{8}$; | м) $\frac{4}{l+2} = 1,5 - \frac{4}{l-2}$. |

681. Решите уравнение:

- | | |
|---|--|
| а) $3i - 2 = \frac{8}{i}$; | ж) $4a + 1 = \frac{15}{a+2}$; |
| б) $\frac{j}{j^2+2} = \frac{1}{3}$; | з) $\frac{b-4}{b-5} + \frac{b-6}{b+5} = 2$; |
| в) $\frac{k+2}{9k} = \frac{k}{8k-5}$; | и) $\frac{3c-2}{c} - \frac{1}{c-2} = \frac{3c+4}{c^2-2c}$; |
| г) $\frac{l-4}{l+3} = \frac{l+2}{l-2}$; | к) $\frac{5d+7}{d-2} - \frac{2d+21}{d+2} = 8\frac{2}{3}$; |
| д) $\frac{m^2-5}{m-1} = \frac{7m+10}{9}$; | л) $\frac{4}{p+3} - \frac{1}{p-3} = \frac{5}{3-p} - 1$; |
| е) $\frac{4(6-2t)}{t^2-6} = \frac{t^2}{t(6-t)}$; | м) $\frac{1}{a-2} - \frac{6-q}{3q^2-12} = \frac{1}{2-q} - 1$. |

682. Решите уравнение:

а) $\frac{9a^2 - 3a - 15}{15a^2 + a - 25} = \frac{3}{5};$

б) $\frac{1}{x+3} + \frac{5}{3-x} = \frac{x-4}{2(x+3)};$

в) $\frac{15 - 10y^2}{2y-1} + 1 = \frac{56 + 7y}{2y+1} - 5y;$

г) $\frac{21}{b+1} + \frac{33}{1-b^2} = \frac{4}{1-b};$

д) $\frac{3b-10}{b-4} = 7 - \frac{17+4b}{b+3};$

е) $\frac{1-c}{c+1} - \frac{1+c}{1-c} = \frac{8}{c^2-1};$

ж) $\frac{1+d}{d-1} - \frac{8}{d^2-1} = \frac{d-1}{d+1};$

з) $\frac{6}{2-e} + \frac{e^2}{e^2-4} - \frac{2}{e-2} = 0.$

683. Решите уравнение:

а) $\frac{(v+3)^2}{5} + 1 - \frac{(3v-1)^2}{5} = \frac{v(2v-3)}{2};$

б) $\frac{5u-u^2}{3} - \frac{(5u-11)^2}{4} = 6 - \frac{(7-u)^2}{2};$

в) $3x + \frac{(x-3)^2}{4} = \frac{(x+3)^2}{8} + \frac{(x+1)(x-1)}{8};$

г) $\frac{5y-1}{9} + \frac{3y-1}{5} = \frac{2}{y} + y - 1;$

д) $\frac{6}{3a-1} = 3a + 4;$

е) $5b + 6 = \frac{7}{2b+9};$

ж) $\frac{c-3}{3+c} - 2 = \frac{-7-3c}{3c+1};$

з) $\frac{6m^2+5m-3}{8m^2-7m-4} = \frac{3}{4}.$

684. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{6a+6} + \frac{1}{3a+6} = \frac{1}{a+3};$

б) $\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2x+2};$

в) $\frac{b+11}{b^2-1} - \frac{b-1}{b+1} = \frac{2(b+7)}{b+1} - 4;$

г) $\frac{4(3y+1)}{(y-1)(y+3)} = \frac{3y-2}{y-1} - \frac{2y+3}{y+3};$

д) $\frac{c+1}{4c} - \frac{5c-1}{2c-4} = \frac{8-c}{3c^2-6c} - \frac{c-5}{c-2};$

е) $\frac{20+u}{2u-2} - \frac{9u^2+u+2}{6u^2-6} = \frac{5-3u}{u+1} - \frac{10-4u}{3u+3};$

ж) $\frac{30}{d^2-1} - \frac{13}{d^2+d+1} = \frac{7+18d}{d^3-1};$

з) $\frac{2}{t^2-t+1} = \frac{1}{t+1} + \frac{2t-1}{t^3+1}.$

685. Решите уравнение:

а) $\frac{13-a}{3+a} + \frac{6}{a^2-9} = \frac{3}{a+3} - \frac{2}{3-a}$;

б) $\frac{1}{2-b} - 1 = \frac{1}{b-2} - \frac{6-b}{3b^2-12}$;

в) $\frac{1}{c+2} - \frac{1}{c+4} = \frac{1}{c+3} - \frac{1}{c+1}$;

г) $\frac{3}{d-2} - \frac{4}{d-1} = \frac{1}{d-4} - \frac{2}{d-3}$;

д) $\frac{1}{u+2} + \frac{1}{u+20} = \frac{1}{u+4} + \frac{1}{u+8}$;

е) $\frac{1}{v-6} + \frac{1}{v-4} = \frac{1}{v+2} + \frac{1}{v-7}$;

ж) $\frac{1}{y-8} - \frac{1}{y-2} = \frac{1}{y-11} - \frac{1}{y-10}$;

з) $\frac{1}{z-9} + \frac{1}{z-7} = \frac{1}{z+18} + \frac{1}{z-10}$.

686. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3}p^2 + 4\sqrt{3}p - 2\sqrt{3} = 0$;

в) $\frac{r\sqrt{5}}{2r-\sqrt{5}} = \frac{2r}{r\sqrt{5}-3}$;

б) $q^2 + 2(\sqrt{3}+1)q + 2\sqrt{3} = 0$;

г) $\frac{2s}{s\sqrt{3}-5} = \frac{s\sqrt{3}}{s-2\sqrt{3}}$.

687. При каких значениях переменной:

а) сумма дробей $\frac{2y}{1+y}$ и $\frac{3y}{y+2}$ равна 5;

б) сумма дробей $\frac{x}{x-2}$ и $\frac{x}{x+2}$ равна -2;

в) разность дробей $\frac{4k}{2k+3}$ и $\frac{2-5k}{3k+2}$ равна 3;

г) разность дробей $\frac{3m}{3+2m}$ и $\frac{7-m}{3m-2}$ равна 1;

д) разность дробей $\frac{a+4}{a-3}$ и $\frac{6}{a+8}$ равна их произведению;

е) сумма дробей $\frac{b}{b+2}$ и $\frac{6}{b-4}$ равна их произведению?

688. Решите уравнение:

а) $a^2 - 8|a| + 15 = 0$;

ж) $2z^2 - 7|z| + 3 = 0$;

б) $b^2 - |b| - 12 = 0$;

з) $10t^2 - 9|t| - 1 = 0$;

в) $c^2 + 10|c| + 20 = 0$;

и) $9m^2 - 12|m| - 5 = 0$;

г) $d^2 + 8|d| - 20 = 0$;

к) $5n^2 - 8|n| + 3 = 0$;

д) $2x^2 - 5|x| + 2 = 0$;

л) $3k^2 - 23|k| - 8 = 0$;

е) $5y^2 + 5|y| + 1 = 0$;

м) $3l^2 + 20|l| - 7 = 0$.

689. Диагональ LN образует со сторонами LM и NM параллелограмма $KLMN$ углы в 45° и 75° соответственно. Найдите углы параллелограмма.

690. В шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны равны между собой и все углы равны между собой (рис. 300). Докажите, что:

- а) диагональ AD параллельна стороне BC ;
- б) стороны BC и FE , CD и AF , DE и BA параллельны.

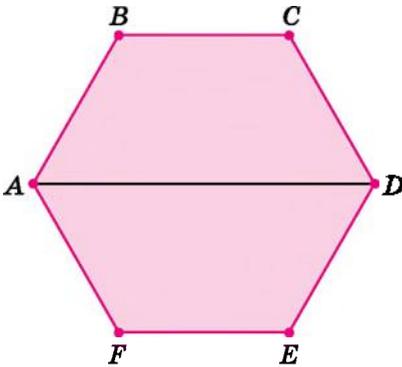


Рис. 300

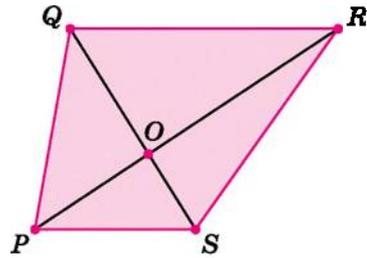


Рис. 301

691. Диагонали PR и QS трапеции $PQRS$ перпендикулярны, а диагональ PR образует со сторонами PQ и RQ углы в 45° и 30° соответственно (рис. 301). Найдите площадь трапеции, учитывая, что основание PS равно 4 см.

692. На рисунке 302 изображена развертка прямой треугольной призмы, в основании которой лежит равносторонний треугольник со стороной 10 см. Найдите боковую и полную поверхности призмы, учитывая, что диагональ AB_1 боковой грани образует с ребром AA_1 угол в 30° .

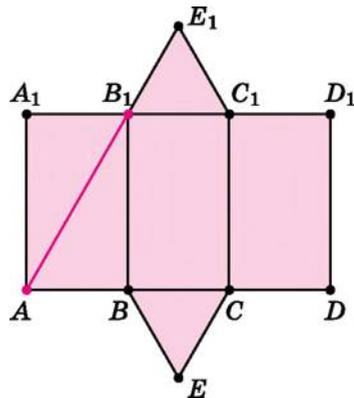


Рис. 302

693. Киев, Харьков, Одесса, Днепропетровск — самые крупные города Украины. Количество жителей Киева относится к количеству жителей Одессы как $717 : 254$,

к количеству жителей Днепропетровска — как $956 : 331$, на 398 тыс. человек больше общего населения Харькова и Одессы и на 421 тыс. человек больше общего населения Харькова и Днепропетровска. Найдите численность жителей этих городов Украины.

* * *

694. В однокруговом турнире по шашкам участвуют 7 учеников. Алесь сыграл 6 партий, Богдан — 5, Василий и Геннадий — по 3, Денис и Дима — по 2, Костя — 1. С кем сыграл свои партии Василий?

695. Начертите четырехугольник, который можно двумя прямыми разделить на 3, на 4, на 5, на 6 частей. Покажите, как это делается.

696. Если к числу 40 прибавить 24, то получится число 64 — точный квадрат, а если вычесть 24, то число 16 — также точный квадрат. Сколько есть еще натуральных чисел, дающих точные квадраты как при прибавлении к ним числа 24, так и при вычитании этого числа?

21. Квадратный трехчлен. Теорема Виета

А. Коэффициенты p и q приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ и его корни x_1 и x_2 связаны зависимостью, которую называют теоремой Виета.

Теорема 4. Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то их сумма равна второму коэффициенту p , взятому с противоположным знаком, а произведение — свободному члену q :

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Доказательство. Пусть приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2 . Тогда

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Значит,

$$x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = -p;$$

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = \\ &= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q. \end{aligned}$$

Пример 1. Один из корней уравнения $t^2 + pt - 6 = 0$ равен 2. Найдем коэффициент p и другой корень t_2 этого уравнения.

По теореме Виета

$$t_1 \cdot t_2 = -6.$$

Поскольку $t_1 = 2$, то

$$2t_2 = -6.$$

Значит,

$$t_2 = -3.$$

По теореме Виета

$$t_1 + t_2 = -p.$$

Значит,

$$p = -(t_1 + t_2) = -(2 - 3) = 1.$$

Ответ. $t_2 = -3$; $p = 1$.

Франсуа Виет (1540—1603) — французский математик (рис. 303), благодаря работам которого алгебра становится общей наукой об алгебраических уравнениях, в основе которой лежат преобразования выражений с переменными. Виет установил единообразный прием решения уравнений второй, третьей, четвертой степеней.



Рис. 303

Теорему Виета можно распространить на произвольное квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Пусть x_1 и x_2 — его корни. Данное уравнение равносильно приведенному уравнению

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Пример 2. Составим квадратное уравнение, корнями которого являются числа $-\frac{2}{3}$ и 5.

По теореме Виета

$$p = -(z_1 + z_2) = -\left(-\frac{2}{3} + 5\right) = -\frac{13}{3};$$

$$q = z_1 \cdot z_2 = -\frac{2}{3} \cdot 5 = -\frac{10}{3}.$$

Это позволяет записать приведенное квадратное уравнение

$$z^2 - \frac{13}{3}z - \frac{10}{3} = 0,$$

равносильное уравнению

$$3z^2 - 13z - 10 = 0.$$

Б. Истинно утверждение, обратное теореме Виета.

Теорема 5. Если числа p , q , x_1 и x_2 удовлетворяют условию

$$x_1 + x_2 = -p; x_1 \cdot x_2 = q,$$

то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Доказательство. Пусть для чисел p , q , x_1 и x_2 выполняются условия:

$$x_1 + x_2 = -p; x_1 \cdot x_2 = q.$$

Отсюда

$$p = -(x_1 + x_2), q = x_1 \cdot x_2.$$

Поэтому уравнение $x^2 + px + q = 0$ можно записать как

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0.$$

Последнее уравнение равносильно преобразуется так:

$$\begin{aligned}x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 &= 0; \\(x^2 - x_1x) - (x_2x - x_1x_2) &= 0; \\x(x - x_1) - x_2(x - x_1) &= 0; \\(x - x_1)(x - x_2) &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда понятно, что числа x_1 и x_2 — корни уравнения $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, а значит, и равносильного ему уравнения $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$.

Используя теорему, обратную теореме Виета, можно в некоторых случаях подбором найти корни квадратного уравнения.

Пример 3. Решим уравнение $u^2 + 3u - 10 = 0$.

Здесь $q = -10$. Заметим, что

$$-10 = (-10) \cdot 1 = (-1) \cdot 10 = (-5) \cdot 2 = (-2) \cdot 5.$$

Из пар чисел $(-10; 1)$, $(-1; 10)$, $(-5; 2)$, $(-2; 5)$ выбираем ту, сумма компонентов которой равна $-p$, т. е. числу -3 . Такой парой является пара $(-5; 2)$. По теореме 5 получим:

$$u_1 = -5; u_2 = 2.$$

Ответ. $u_1 = -5; u_2 = 2$.

В. Многочлен $ax^2 + bx + c$, в котором $a \neq 0$, называется квадратным трехчленом.

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ называются корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Теорема 6. Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то истинно равенство

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Тогда

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a},$$

или

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2), \quad \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2.$$

Далее будем иметь:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = \\ &= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = a((x^2 - x_1x) - (x_2x - x_1x_2)) = \\ &= a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) = a(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Значит,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Пример 4. Разложим на множители трехчлен

$$15s^2 + 13s + 2.$$

Найдем корни данного трехчлена:

$$\begin{aligned} D &= 13^2 - 4 \cdot 15 \cdot 2 = 49. \\ s &= \frac{-13 \pm \sqrt{49}}{30} = \frac{-13 \pm 7}{30}; \\ s_1 &= \frac{-13 - 7}{30} = -\frac{2}{3}; \quad s_2 = \frac{-13 + 7}{30} = -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

По теореме 6 получим:

$$15s^2 + 13s + 2 = 15\left(s + \frac{2}{3}\right)\left(s + \frac{1}{5}\right).$$

Полученный результат можно записать без дробных чисел. Учтем, что $15 = 3 \cdot 5$, и умножим 3 на $\left(s + \frac{2}{3}\right)$, а 5 на $\left(s + \frac{1}{5}\right)$:

$$15s^2 + 13s + 2 = (3s + 2)(5s + 1).$$

Ответ. $15s^2 + 13s + 2 = (3s + 2)(5s + 1)$.

Пример 5. Упростим выражение

$$\frac{15a^2 + 13a + 2}{3a^2 - 7a - 6}.$$

Разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби:

$$\begin{aligned} 15a^2 + 13a + 2 &= (3a + 2)(5a + 1); \\ 3a^2 - 7a - 6 &= (3a + 2)(a - 3). \end{aligned}$$

Правообладатель Народная асвета

Тогда

$$\frac{15a^2 + 13a + 2}{3a^2 - 7a - 6} = \frac{(3a + 2)(5a + 1)}{(3a + 2)(a - 3)} = \frac{5a + 1}{a - 3}.$$

Ответ. $\frac{5a + 1}{a - 3}$.



1. Сформулируйте теорему Виета. Запишите формулы, выражающие связь между корнями приведенного квадратного уравнения и его коэффициентами.
2. Запишите формулы, выражающие связь между корнями общего квадратного уравнения и его коэффициентами.
3. Какой многочлен называют квадратным трехчленом? Какие числа называют корнями квадратного трехчлена?
4. Сформулируйте теорему о разложении квадратного трехчлена на линейные множители.

697. Найдите сумму и произведение корней квадратного уравнения:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| а) $a^2 - 41a + 31 = 0$; | ж) $3d^2 - d - 19 = 0$; |
| б) $x^2 + 19x - 47 = 0$; | з) $5t^2 - 23t + 7 = 0$; |
| в) $b^2 - 17b - 14 = 0$; | и) $6e^2 + 19e - 16 = 0$; |
| г) $y^2 + 7y + 10 = 0$; | к) $5u^2 - 45u - 28 = 0$; |
| д) $c^2 + 312c = 0$; | л) $12f^2 + 13 = 0$; |
| е) $z^2 - 73 = 0$; | м) $4v^2 - 5v = 0$. |

698. Используя теорему Виета, проверьте, являются ли корнями данного уравнения указанные числа:

- а) $b^2 + b - 6 = 0$; числа -3 и 2 ;
- б) $y^2 - 7y + 12 = 0$; числа -4 и 3 ;
- в) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; числа -1 и $-\frac{1}{2}$;
- г) $3c^2 - 11c + 6 = 0$; числа $\frac{2}{3}$ и 3 .

699. Решите уравнение и проверьте правильность решения по теореме Виета:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| а) $a^2 - a - 6 = 0$; | д) $3t^2 - 2t + 1 = 0$; |
| б) $m^2 - 9m + 8 = 0$; | е) $12y^2 + 13y + 3 = 0$; |
| в) $b^2 + 9b + 20 = 0$; | ж) $6f^2 + 5f - 6 = 0$; |
| г) $x^2 - 13x + 42 = 0$; | з) $20z^2 + z - 12 = 0$. |

700. Используя теорему Виета, найдите подбором корни уравнения:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| а) $x^2 - 7x + 12 = 0$; | д) $n^2 - 12n + 11 = 0$; |
| б) $a^2 + 7a + 10 = 0$; | е) $r^2 + 8r + 12 = 0$; |
| в) $q^2 + 3q - 18 = 0$; | ж) $t^2 - 11t + 18 = 0$; |
| г) $s^2 - 4s - 5 = 0$; | з) $y^2 - 6y - 16 = 0$. |

701. Найдите подбором корни уравнения:

- а) $b^2 + 7b - 8 = 0$; в) $t^2 + 18t + 80 = 0$;
б) $k^2 - 9k + 18 = 0$; г) $f^2 - 16f + 55 = 0$.

702. Один из корней уравнения $y^2 + 22y - 23 = 0$ равен 1. Найдите второй корень.

703. Один из корней уравнения $t^2 - 17t - 38 = 0$ равен -2 . Найдите второй корень.

704. Один из корней уравнения $x^2 + ax + 12 = 0$ равен 6. Найдите второй корень и коэффициент a .

705. Один из корней уравнения $x^2 - 12,5x + q = 0$ равен 10,5. Найдите второй корень и коэффициент q .

706. Разность корней квадратного уравнения $u^2 - 8u + q = 0$ равна 2. Найдите коэффициент q .

707. Устно определите знаки корней уравнения:

- а) $x^2 - 5x + 4 = 0$; в) $s^2 - 2s - 35 = 0$; д) $m^2 - 5m + 3 = 0$;
б) $k^2 + 7k + 10 = 0$; г) $t^2 - 8t - 8 = 0$; е) $r^2 + 3r - 6 = 0$.

708. Без решения определите знаки корней уравнения:

- а) $x^2 - 14x + 33 = 0$; г) $4m^2 + 3m - 2 = 0$;
б) $a^2 + 13a + 22 = 0$; д) $r^2 + 4r + 4 = 0$;
в) $3l^2 + 14l + 4 = 0$; е) $z^2 - 6z + 9 = 0$.

709. Докажите, что уравнение имеет корни:

- а) $5x^2 + 125x - 329 = 0$; в) $7a^2 + 963a + 9 = 0$;
б) $6y^2 - 101y - 826 = 0$; г) $121b^2 - 367b - 1023 = 0$.

710. Не решая уравнения, определите, имеет ли оно корни, и если имеет, то определите их знаки:

- а) $x^2 - 16x + 15 = 0$; г) $6y^2 - y - 111 = 0$;
б) $m^2 - 3m - 1 = 0$; д) $b^2 - \sqrt{6}b + 1 = 0$;
в) $n^2 - 16n + 63 = 0$; е) $\sqrt{2}r^2 - 14r - 9\sqrt{2} = 0$.

711. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

- а) 3 и 4; д) 2 и -7 ; и) 0 и 7;
б) -7 и 7; е) $\frac{1}{3}$ и $-\frac{2}{3}$; к) -3 и $-\sqrt{5}$;
в) -4 и -5 ; ж) 1 и -9 ; л) $\sqrt{3} - 1$ и $\sqrt{3} + 1$;
г) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; з) 7 и -11 ; м) $3 - 2\sqrt{2}$ и $3 + 2\sqrt{2}$.

712. При каком значении a :

- а) уравнение $x^2 + ax + 12 = 0$ имеет корень -3 ;
- б) число 4 является корнем уравнения $y^2 + ay - 15 = 0$;
- в) корень уравнения $s^2 + 5s + a = 0$ равен -2 ;
- г) уравнение $t^2 - 2t + a = 0$ имеет корень -5 ?

713. Без решения уравнения $x^2 + 8x + 12 = 0$ составьте новое уравнение, корни которого:

- а) в два раза больше корней данного уравнения;
- б) в два раза меньше корней данного уравнения;
- в) на 3 больше корней данного уравнения;
- г) на 2 меньше корней данного уравнения;
- д) равны сумме и произведению корней данного уравнения;
- е) равны квадратам корней данного уравнения.

714. Разложите на множители квадратный трехчлен:

- а) $3a^2 - 8a + 5$;
- б) $4m^2 - 7m + 3$;
- в) $12t^2 - 17t + 6$;
- г) $6b^2 - 7b + 2$;
- д) $9x^2 + 24x + 16$;
- е) $25n^2 + 40n - 4$;
- ж) $-2l^2 + 5l - 2$;
- з) $-3y^2 + 2y + 1$.

715. Упростите дробь:

- а) $\frac{r^2 + r - 2}{r - 1}$;
- б) $\frac{b^2 + 4b - 12}{b - 2}$;
- в) $\frac{c + 3}{c^2 - 6c - 27}$;
- г) $\frac{d - 8}{d^2 - d - 56}$;
- д) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 2}$;
- е) $\frac{y^2 - 3y - 10}{y^2 - 8y + 15}$;
- ж) $\frac{4a^2 + 28a + 49}{14a^2 + 53a + 14}$;
- з) $\frac{-5s^2 + 4s - 0,6}{10s^2 + 5s - 1,4}$;
- и) $\frac{2z^2 - 3z - 2}{4z^2 - 1}$;
- к) $\frac{3t^2 + 8t - 3}{9t^2 - 1}$;
- л) $\frac{r^2 - 6r - 7}{r^2 - 8r + 7}$;
- м) $\frac{v^2 - 8v - 9}{v^2 + 9v + 8}$.

716. Разложите на множители:

- а) $x^3 - 3x^2 + 2x$;
- б) $y^3 + 8y^2 + 7y$;
- в) $z^3 + 4z^2 - 21z$;
- г) $t^3 - 7t^2 + 12t$;
- д) $r^3 - 9r^2 - 22r$;
- е) $8v^3 + 10v^2 + 3v$.

717. Упростите выражение:

- а) $\frac{1}{a^2 - 7a + 12} + \frac{1}{a - 3}$;
- б) $\frac{2}{b^2 + 6b + 8} - \frac{1}{b + 2}$;
- в) $\frac{7}{5z^2 + 3z - 2} - \frac{5}{5z - 2}$;
- г) $\frac{5t + 1}{t^2 + 9t - 10} : \frac{5t^2 + t}{t^2 - 2t + 1}$.

718. Без вычисления корней t_1 и t_2 уравнения $6t^2 - t - 3 = 0$ найдите:

- а) $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$; б) $t_1^2 + t_2^2$; в) $\frac{t_1}{t_2} + \frac{t_2}{t_1}$; г) $t_1^3 + t_2^3$.

719. В основании пирамиды $OMNPR$ на рисунке 304 лежит квадрат $MNPR$ со стороной 6 см, а все боковые ребра OM , ON , OP , OR равны диагонали MP основания. Найдите:

- а) диагональ MP основания $MNPR$;
 б) медиану OA боковой грани ROP ;
 в) площадь грани ROP ;
 г) боковую поверхность пирамиды $OMNPR$;
 д) полную поверхность пирамиды $OMNPR$;
 е) сумму длин всех ребер пирамиды $OMNPR$.

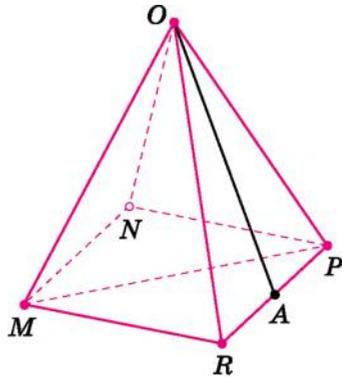


Рис. 304

720. Отрезок AC — общая гипотенуза прямоугольных треугольников ABC и ADC (рис. 305). В первом из этих треугольников угол ACB равен 30° , а катет AB против него составляет 4 см, во втором — катеты DA и DC равны. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

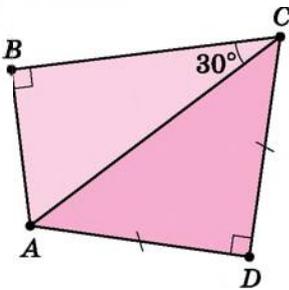


Рис. 305

721. Отрезок LL_1 — биссектриса треугольника KLM (рис. 306). На луче KL от точки L отложен отрезок LN , равный стороне LM . Докажите, что LL_1 и MN параллельны.

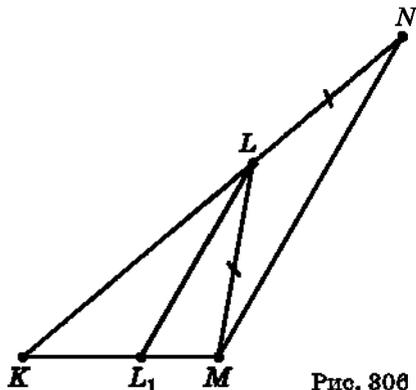


Рис. 306

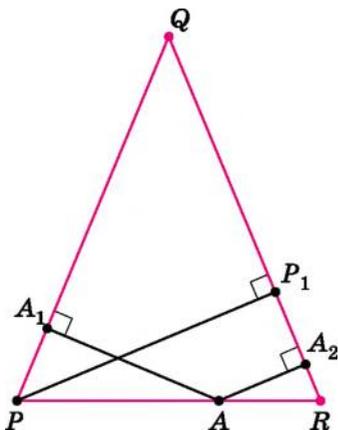


Рис. 307

722. Из произвольной точки A основания PR равнобедренного треугольника PQR опущены перпендикуляры AA_1 и AA_2 на боковые стороны PQ и RQ (рис. 307). Докажите, что сумма этих перпендикуляров равна высоте PP_1 треугольника, опущенной на боковую сторону.

723. Прямоугольник $RCDE$ имеет с прямоугольным треугольником RST общий прямой угол R . Три остальные вершины прямоугольника принадлежат сторонам треугольника. Катеты RS и RT равны

12 см и 18 см. Найдите стороны прямоугольника, учитывая, что одна из них в два раза больше другой.

724. Куба, Гаити, Ямайка, Пуэрто-Рико — крупнейшие острова архипелага Антильские острова. Площадь Гаити относится к площади Кубы как $11 : 15$, а к площади Ямайки как $154 : 23$. Площадь Кубы на 7,9 тыс. км² больше общей площади остальных островов, а площадь Ямайки больше площади Пуэрто-Рико на 2,9 тыс. км². Найдите площади каждого из островов.

725. На рисунке 308 показаны соотношения между самыми высокими точками островов Куба, Гаити, Ямайка, Пуэрто-Рико. Найдите эти высоты, учитывая, что среднее арифметическое высот самых высоких точек Кубы и Ямайки равно 2114 м.



Рис. 308

* * *

726. На окрашивание куба израсходовано 6 г краски. Куб распилили на 27 одинаковых кубиков. Сколько краски понадобится для окрашивания неокрашенных граней кубиков?

727. Найдите все такие некруглые двузначные числа, которые делятся на сумму своих цифр.

728. Квадратный лист бумаги разделен на одинаковые клетки-квадратики. Из него вырезали квадрат с целым количеством клеток. Сколько было квадратиков вначале, если осталось их 60?

22. Решение задач с помощью уравнений

Уравнения могут использоваться при решении текстовых задач.

Задача 1. В четырехугольнике диагонали перпендикулярны и одна из них на 5 дм меньше другой (рис. 309). Найдите диагонали, учитывая, что площадь четырехугольника равна 18 дм².

Пусть $CE = a$ дм, тогда $DF = (a - 5)$ дм. Значит, площадь четырехугольника $CDEF$ выразится формулой

$$S_{CDEF} = \frac{1}{2} a(a - 5).$$

Поскольку по условию $S_{CDEF} = 18$ дм², то можно записать уравнение:

$$\frac{1}{2} a(a - 5) = 18.$$

Корни этого уравнения:

$$a_1 = -4; a_2 = 9.$$

Поскольку длина отрезка не может быть отрицательной, то остается значение $a = 9$. Значит, $CE = 9$ дм, тогда

$$DF = (9 - 5) \text{ дм} = 4 \text{ дм}.$$

Эти значения диагоналей CE и DF соответствуют условию задачи.

Ответ. 9 дм; 4 дм.

Задача 2. Из Червения в Березино (рис. 310) выехал автобус, а через 10 мин — маршрутное такси, скорость которого на 20 км/ч больше скорости автобуса. Найдите скорости

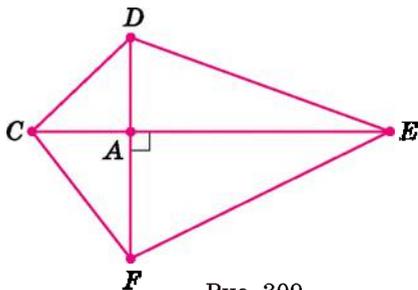


Рис. 309

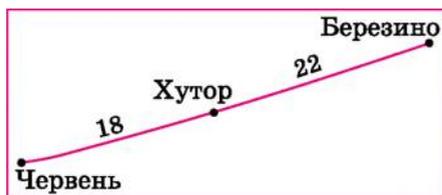


Рис. 310

автобуса и такси, учитывая, что они приехали в Березино одновременно.

По рисунку 310 находим, что путь от Червеня до Березино составляет 40 км. Пусть v км/ч — скорость автобуса. Тогда скорость такси равна $(v + 20)$ км/ч. Автобус был в пути $\frac{40}{v}$ ч, такси — $\frac{40}{v + 20}$ ч. В соответствии с условием задачи разность между временем движения автобуса и временем движения такси составляет 10 мин, т. е. $\frac{1}{6}$ ч. В результате получаем уравнение

$$\frac{40}{v} - \frac{40}{v + 20} = \frac{1}{6}. \quad (1)$$

Решим это уравнение:

$$\begin{aligned} 40 \cdot 6(v + 20) - 40 \cdot 6v &= v(v + 20); \\ 240v + 4800 - 240v &= v^2 + 20v; \\ v^2 + 20v - 4800 &= 0; \\ v_1 &= -80; v_2 = 60. \end{aligned}$$

При этих значениях v знаменатели дробей, входящих в уравнение (2), не равны нулю. Значит, числа -80 и 60 являются корнями уравнения (2). Из них только второе число удовлетворяет условию задачи, поскольку скорость автобуса должна быть положительной. Поэтому скорость автобуса равна 60 км/ч, скорость такси — 80 км/ч.

Ответ. 60 км/ч; 80 км/ч.



1. Из каких этапов состоит решение текстовой задачи?

2. Почему после решения уравнения, полученного по условию задачи, требуется проверка того, соответствуют ли полученные корни условию задачи?

729. Найдите два последовательных натуральных числа, произведение которых равно:

а) 132; б) 306.

730. Найдите два последовательных нечетных натуральных числа, произведение которых равно:

а) 195; б) 899.

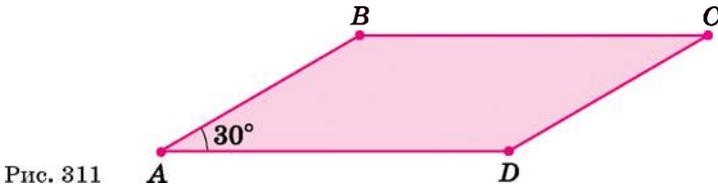
731. Числитель обыкновенной дроби меньше ее знаменателя на единицу. Если к числителю дроби прибавить 7, а к знаменателю прибавить 3, то дробь увеличится на $\frac{1}{2}$. Найдите дробь.

732. Числитель обыкновенной дроби меньше ее знаменателя на единицу. Если к числителю дроби прибавить 4, а к знаменателю прибавить 6, то дробь уменьшится на $\frac{1}{12}$. Найдите дробь.

733. Числитель обыкновенной дроби меньше ее знаменателя на 5. Если числитель дроби увеличить в два раза, а знаменатель в полтора раза, то дробь увеличится на $\frac{1}{8}$. Найдите дробь.

734. Периметр прямоугольника равен 12 м, а его площадь — 8 м². Найдите стороны прямоугольника.

735. Периметр параллелограмма равен 20 м, а его площадь 12 м² (рис. 311). Найдите стороны параллелограмма, учитывая, что острый угол параллелограмма равен 30°.



736. Площадь треугольника равна $6\sqrt{6}$ дм². Одна из его сторон на 1 дм больше второй и меньше третьей. Найдите стороны треугольника и проведенные к ним высоты.

737. Периметр прямоугольного треугольника равен 40 см, а один из катетов — 15 см. Найдите площадь треугольника.

738. Площадь прямоугольного треугольника равна 60 см², а один из его катетов на 7 см меньше другого. Найдите высоты треугольника.

739. Площадь прямоугольного треугольника равна 6 м², а высота, проведенная к гипотенузе, — 2,4 м. Найдите катеты, учитывая, что периметр треугольника равен 12 м.

740. Путь в 300 км пассажирский поезд проходит на 2,5 ч быстрее товарного. Найдите скорости каждого из поездов, учитывая, что они отличаются на 20 км/ч.



Рис. 312

741. Из Усакино в Сергеевичи выехал велосипедист, а через 1 ч 36 мин — мотоциклист (рис. 312). Найдите скорости велосипедиста и мотоциклиста, учитывая, что они приехали в Сергеевичи одновременно, а скорость мотоциклиста больше на 32 км/ч.

742. Чтобы ликвидировать опоздание на 48 мин, поезд на перегоне в 208 км увеличил скорость, с которой он должен был идти по расписанию, на 13 км/ч. Найдите скорость поезда по расписанию.

743. Путешественник проплыл на лодке по Браславским озерам 18 км и по течению Друйки — 14 км, затратив на путь по озерам на 1 ч больше. Найдите скорость движения путешественника по озеру, учитывая, что скорость течения реки равна 1 км/ч.

744. Проплыв на катере 36 км против течения реки и 30 км по течению, путешественник затратил $3\frac{1}{2}$ ч. Найдите скорость течения реки, учитывая, что собственная скорость катера равна 19 км/ч.

745. Отец с сыном выполнили работу за 7,2 ч. За какое время каждый из них выполнил бы эту работу, если сыну для этого нужно на 6 ч больше?

746. Два брата вместе могут закончить работу за 7,5 ч. Найдите время, за которое каждый из них выполнил бы работу, учитывая, что младшему из братьев для этого нужно на 8 ч больше.

747. Из Бегомля в Витебск (рис. 313) одновременно выехали две машины. Одна из них ехала со скоростью на 27 км/ч большей и поэтому приехала на место на 1 ч раньше. Найдите скорости машин.

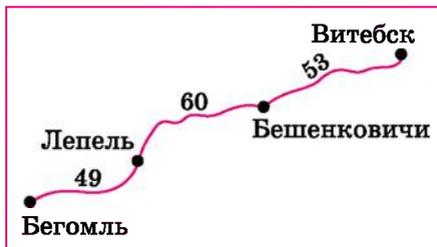


Рис. 313

748. Если бы длина прямоугольной спортивной площадки площадью 720 м^2 была на 6 м больше, а ширина на 4 м меньше, то ее площадь осталась бы прежней. Найдите размеры площадки.

749. Найдите измерения прямоугольника, учитывая, что его периметр равен:

- а) 46 см, а диагональ — 17 см;
- б) 28 дм, а его площадь — 48 дм^2 ;
- в) 28 см, а площади квадратов, построенных на двух смежных его сторонах, в сумме составляют 116 см^2 .

750. Поезд вышел со станции с опозданием на 20 мин, но, повысив на 16 км/ч плановую скорость, через 160 км ликвидировал опоздание. Найдите плановую скорость поезда.

751. Первый насос, опорожнив $\frac{2}{3}$ цистерны, испортился, и заканчивал работу второй насос с большей производительностью. Работа заняла 40 мин, а если бы работали оба насоса вместе, то была бы выполнена за 18 мин. За сколько времени выполнил бы всю работу один второй насос?

752. К раствору, в котором 40 г соли, долили 200 г воды, из-за чего концентрация раствора уменьшилась на 10 (говорят, что она уменьшилась на 10 процентных пунктов). Сколько воды было в растворе первоначально и какой была его концентрация?

753. Упростите:

- а) $(2\sqrt{18} + 3\sqrt{8}) + (3\sqrt{32} - \sqrt{50})$;
- б) $(3\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18}) + (\sqrt{72} - \sqrt{80})$;
- в) $(0,5\sqrt{24} - 3\sqrt{40}) - (\sqrt{160} + \sqrt{54} - \sqrt{1000})$;
- г) $(3\sqrt{2} - \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{8}{\sqrt{8}}) - (\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{48})$;
- д) $(0,5\sqrt{98} - 4\sqrt{18}) - (\frac{1}{5}\sqrt{50} + \frac{1}{3}\sqrt{72} - \sqrt{200})$;
- е) $(\frac{1}{6}\sqrt{60} - \sqrt{54} + 0,2\sqrt{24}) + (\sqrt{15} - \sqrt{6} + \sqrt{600})$.

754. Выполните действия:

- а) $(\frac{x}{y}\sqrt{xy} - 2\sqrt{\frac{y}{x}} - \sqrt{\frac{1}{xy}}) \cdot \sqrt{xy}$;
- б) $(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{1}{ab}} - \frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}} - b\sqrt{\frac{b}{a}}) : \sqrt{ab}$;

$$в) \left(\frac{1}{2}\sqrt{m} + \frac{8m}{4}\sqrt{m^3} - \frac{1}{m}\sqrt{m^5} \right) : (-\sqrt{m});$$

$$г) \left(\frac{hc}{l}\sqrt{\frac{d}{c}} - \frac{kl}{d}\sqrt{cd} + \frac{k^2}{l^2}\sqrt{\frac{c}{d}} \right) \cdot kl\sqrt{\frac{d}{c}}.$$

755. Найдите значение выражения:

а) $\frac{st}{s+t}$, если $s = 7 + 4\sqrt{3}$, $t = 7 - 4\sqrt{3}$;

б) $\frac{p^2+q^2}{pq}$, если $p = \sqrt{13} + \sqrt{5}$, $q = \sqrt{13} - \sqrt{5}$.

756. Докажите, что значение выражения

$$\left(\sqrt{17 + 4\sqrt{13}} + \sqrt{17 - 4\sqrt{13}} \right)^2$$

является рациональным числом.

757. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;

в) $\frac{2\sqrt{3}-3}{5\sqrt{8}}$;

д) $\frac{1+2\sqrt{m}+4m}{1-2\sqrt{m}}$;

б) $\frac{a+y\sqrt{a}}{y\sqrt{a}}$;

г) $\frac{3-2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}$;

е) $\frac{s^2t-2s\sqrt{t}+4}{s\sqrt{t}+2}$.

* * *

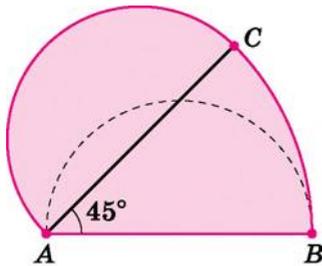


Рис. 314

758. Полуокруг с радиусом 1 приложили к плоскости окрашенной поверхностью и повернули на 45° вокруг точки A (рис. 314). Найдите площадь закрашенной части плоскости.

759. Определите, делятся ли на 2005 разность и сумма произведений

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2002 \cdot 2004 \text{ и } 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2001 \cdot 2003.$$

760. Сколькими способами число 2006 можно представить разностью квадратов двух натуральных чисел?

23. Квадратная функция

Теперь научимся строить график зависимости, которая выражается формулой $y = ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a , b и c — некоторые числа и $a \neq 0$. Такую зависимость называют квадратной функцией.

А. Рассмотрим сначала функцию $y = x^2$. Чтобы построить ее график, составим таблицу соответствующих значений переменных x и y .

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Нанесем точки, координаты которых помещены в таблице, на координатную плоскость. Получим рисунок 315.

Уточним прохождение графика функции в окрестности начала координат, проведя дополнительные вычисления.

x	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
y	0,16	0,09	0,04	0,01

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0	0,01	0,04	0,09	0,16

Видим, что в окрестности начала координат график функции $y = x^2$ очень близко подходит к оси абсцисс.

График функции $y = x^2$ представлен на рисунке 316. Этот график неограниченно продолжается вверх.

График функции $y = x^2$ называется **параболой**. Парабола состоит из двух бесконечных ветвей, расположенных в первой и второй координатных четвертях. Эти ветви плавно сходятся в точке $(0; 0)$ — **вершине параболы**.

По построенному графику легко усмотреть свойства функции $y = x^2$.

Если $x = 0$, то $y = 0$; если $x \neq 0$, то $y > 0$; график функции проходит через начало

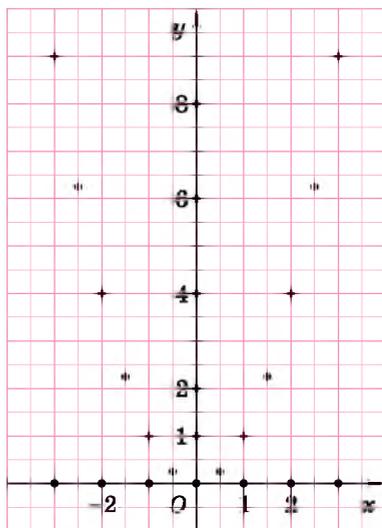


Рис. 315

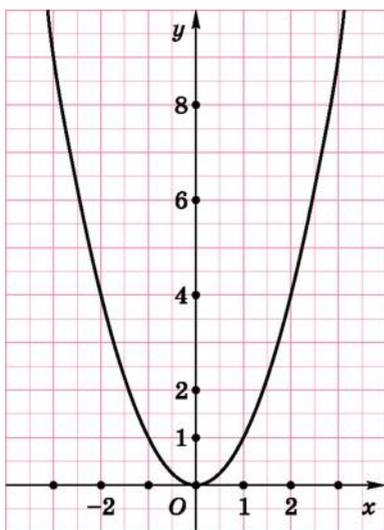


Рис. 316

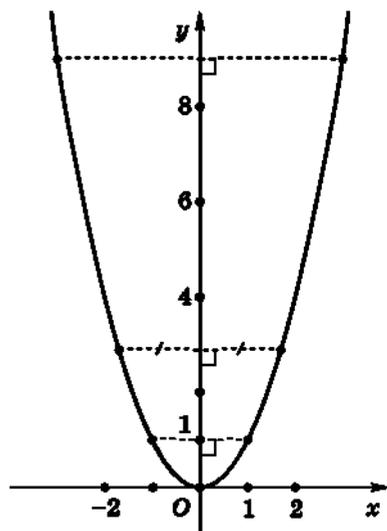


Рис. 317

координат; остальные точки графика лежат выше оси абсцисс.

Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции; ось ординат является осью симметрии графика (рис. 317).

Б. Покажем, как из графика функции $y = x^2$ постепенно получаются графики функций $y = ax^2$, $y = a(x + m)^2$ и $y = a(x + m)^2 + n$.

Чтобы выяснить, как ведет себя функция $y = ax^2$ при разных значениях a , сравним функцию $y = x^2$, например, с функцией $y = 2x^2$. Для этого составим сначала таблицу значений этих функций для некоторых значений аргумента.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

Замечаем, что при одинаковых значениях аргументов значения функции $y = 2x^2$ в 2 раза больше соответствующих значений функции $y = x^2$.

Построив точки, координаты которых приведены в таблице, и соединив эти точки плавными линиями, получим нужные графики (рис. 318).

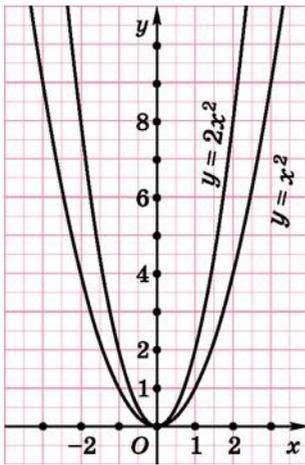


Рис. 318

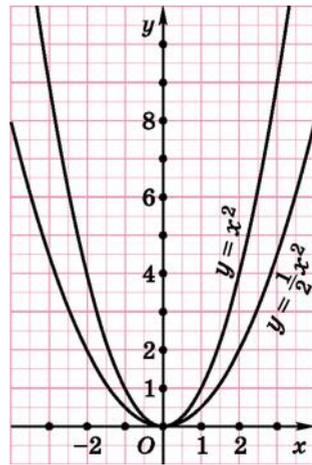


Рис. 319

На рисунке 319 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$. Видно, что при одинаковых значениях аргументов точка на графике функции $y = \frac{1}{2}x^2$ находится в 2 раза ближе к оси абсцисс по сравнению с соответствующей точкой на графике функции $y = x^2$.

На рисунке 320 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = -x^2$. Поскольку при одинаковых значениях абсцисс точки на графиках этих функций имеют противоположные ординаты, то график функции $y = -x^2$ симметричен графику функции $y = x^2$ относительно оси абсцисс.

График функции $y = ax^2$, как и график функции $y = x^2$, является параболой.

В. Теперь рассмотрим функции вида $y = a(x + m)^2$ и выясним, как влияет на график функции параметр m . Для этого с графиком функ-

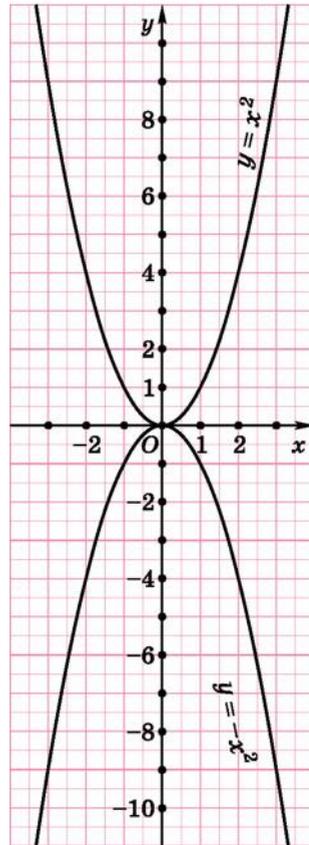


Рис. 320

ции $y = 2x^2$ сравним график функции $y = 2(x + 1)^2$. Сначала составим соответствующую таблицу.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
$x + 1$	-2	-1	0	1	2	3	4
$2(x + 1)^2$	8	2	0	2	8	18	32

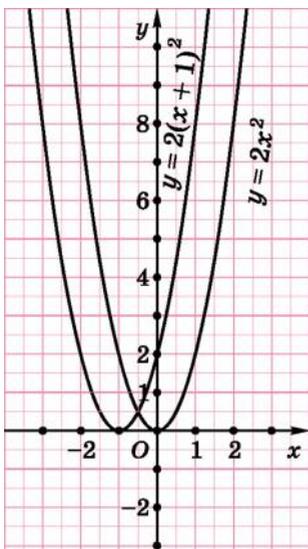


Рис. 321

Можно заметить, что функции $y = 2x^2$ и $y = 2(x + 1)^2$ получают одинаковые значения, если аргумент первой из них на 1 больше аргумента второй. Это означает, что параболу $y = 2(x + 1)^2$ можно получить из параболы $y = 2x^2$ сдвигом вдоль оси абсцисс на 1 единицу влево (рис. 321).

Г. Рассмотрим теперь функции вида $y = a(x + m)^2 + n$. Выясним, как влияет на график функции параметр n . Для этого с графиком функции $y = 2(x + 1)^2$ сравним график функции $y = 2(x + 1)^2 - 3$. Соответствующая таблица будет такой:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$2(x + 1)^2$	18	8	2	0	2	8	18
$2(x + 1)^2 - 3$	15	5	-1	-3	-1	5	15

Мы видим, что при одинаковых значениях аргументов значение функции $y = 2(x + 1)^2 - 3$ на 3 меньше значения функции $y = 2(x + 1)^2$. Графики функций $y = 2(x + 1)^2$ и $y = 2(x + 1)^2 - 3$ представлены на рисунке 322. Видим, что параболу $y = 2(x + 1)^2 - 3$ можно получить из параболы $y = 2(x + 1)^2$ сдвигом вдоль оси ординат на 3 единицы вниз.

Таким образом, графиком функции $y = a(x + t)^2 + n$ является парабола, которая получается из параболы $y = ax^2$; вершина параболы $y = a(x + t)^2 + n$ находится в точке $(-t; n)$; если $a > 0$, то ветви параболы $y = a(x + t)^2 + n$ направлены вверх, если $a < 0$, то — вниз; парабола $y = a(x + t)^2 + n$ имеет ось симметрии прямую $x = -t$.

Отметим, наконец, что к виду $y = a(x + t)^2 + n$ можно привести любую квадратную функцию $y = ax^2 + bx + c$.

Пример 1. Построим график функции $y = 3x^2 - 12x + 16$. Для этого в квадратном трехчлене $3x^2 - 12x + 16$ выделим полный квадрат:

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 - 12x + 16 = \\ &= 3\left(x^2 - 4x + \frac{16}{3}\right) = 3\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 4 - 4 + \frac{16}{3}\right) = \\ &= 3\left((x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 4) - \left(4 - \frac{16}{3}\right)\right) = 3\left((x - 2)^2 + \frac{4}{3}\right) = 3(x - 2)^2 + 4. \end{aligned}$$

Теперь видно, что искомая парабола получается из параболы $y = 3x^2$ сдвигом вдоль оси ординат на 4 единицы вверх и вдоль оси абсцисс на 2 единицы вправо (рис. 323).

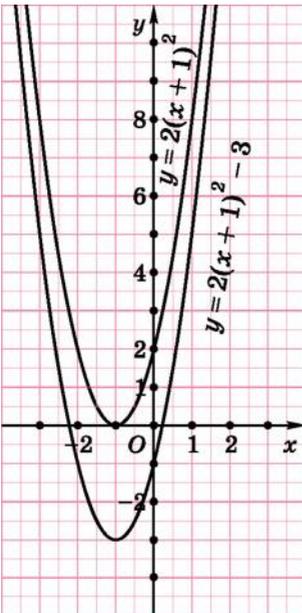


Рис. 322

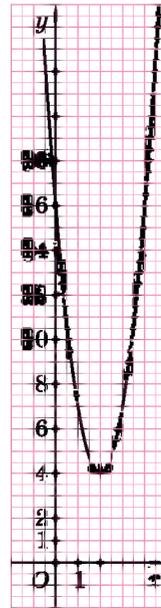


Рис. 323

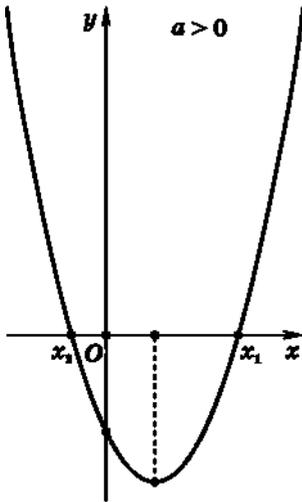


Рис. 324

Знаком коэффициента a определяется направление ветвей параболы: при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз. Точки пересечения с осью абсцисс определяются из условия $y = 0$. Поэтому их абсциссами являются корни трехчлена $ax^2 + bx + c$ (рис. 324).

Д. В некоторых случаях, когда достаточно знать только приблизительное расположение графика квадратной функции, можно ограничиться нахождением координат вершины параболы, определением направления ее ветвей и точек пересечения с осью абсцисс.

Поскольку $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$, то вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ находится в точке $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

Пример 2. Построим график функции $y = -2x^2 - 16x - 30$.

Находим координаты вершины параболы: $x_v = -\frac{-16}{2 \cdot (-2)} = -4$, $y_v = y(x_v) = -2(-4)^2 - 16(-4) - 30 = 2$.

Поскольку коэффициент при квадрате переменной отрицателен, то ветви параболы направлены вниз.

Для уточнения хода графика найдем корни трехчлена $-2x^2 - 16x - 30$:

$$\frac{D}{4} = (-8)^2 - (-2)(-30) = 4; x_1 = \frac{8+2}{-2} = -5,$$

$$x_2 = \frac{8-2}{-2} = -3.$$

Полученные результаты отразим на графике (рис. 325).

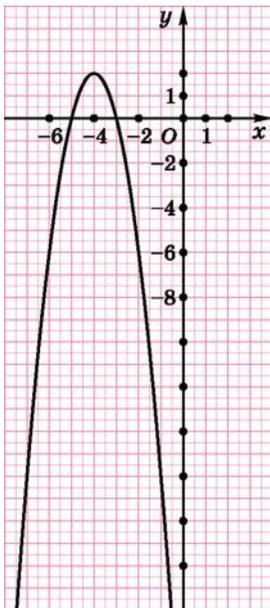


Рис. 325

- ❓ 1. Как называется график функции $y = x^2$?
2. Сформулируйте свойства функции $y = x^2$. Как эти свойства отражаются на графике функции $y = x^2$?

3. Как из графика функции $y = x^2$ можно получить график функции $y = ax^2$?
4. Как отражается на графике функции $y = ax^2$ изменение знака параметра a ?
5. Чем отличается график функции $y = a(x + m)^2$ от графика функции $y = ax^2$?
6. Чем отличается график функции $y = a(x + m)^2 + n$ от графика функции $y = a(x + m)^2$?
7. Сформулируйте основные свойства функции $y = a(x + m)^2 + n$.

761. Для функций $y = x^2$, $y = 3x^2$, $y = \frac{2}{8}x^2$:

- а) составьте таблицу значений, выбрав значениями переменной x числа -3 ; $-2,4$; -2 ; $-1,5$; -1 ; $-\frac{8}{7}$; 0 ; $\frac{8}{7}$; 1 ; $1,5$; 2 ; $2,4$; 3 ;
- б) начертите их графики в одной системе координат;
- в) запишите отношения, выражающие сравнение значений функций при значениях аргумента x , равных $-2,4$; 0 ; 3 ;
- г) запишите утверждения, выражающие характер изменения их значений при изменении аргумента x от $-\infty$ до 0 ; от 0 до $+\infty$;
- д) укажите их наибольшее или наименьшее значение в области определения; назовите координаты вершин парабол, являющихся их графиками.

762. Для функций $S = -a^2$, $S = -1,5a^2$, $S = -\frac{1}{2}a^2$:

- а) составьте таблицу значений, выбрав значениями переменной a числа -3 ; $-2,4$; -2 ; $-1,5$; -1 ; $-\frac{5}{6}$; 0 ; $\frac{5}{6}$; 1 ; $1,5$; 2 ; $2,4$; 3 ;
- б) начертите их графики в одной системе координат;
- в) запишите неравенства, выражающие сравнение их значений при значениях аргумента a , равных -2 ; 0 ; $2,4$;
- г) запишите утверждения, выражающие характер изменения их значений при изменении аргумента a от $-\infty$ до 0 ; от 0 до $+\infty$;
- д) укажите их наибольшее или наименьшее значение в области определения; назовите координаты вершин парабол, являющихся их графиками.

763. Приведите три примера зависимостей между величинами вида $y = ax^2$. Какое значение в каждом примере имеет переменная a ?

764. Укажите направление ветвей параболы:

- а) $y = 5x^2$; б) $z = -7u^2$; в) $B = -\frac{7}{24}y^2$; г) $S = 1\frac{11}{129}a^2$.

765. Найдите коэффициент a , учитывая, что парабола $y = ax^2$ проходит через точку:

- а) (1; 1); б) (-2; 1); в) (3; -1); г) (-4; -2).

766. Постройте график функции $b = -2a^2$, с его помощью решите неравенство:

- а) $-2a^2 < -8$; в) $-2a^2 > -18$; д) $-2a^2 \leq -50$;
 б) $-2a^2 \leq 1$; г) $-2a^2 \leq -32$; е) $-2a^2 > -50$.

767. Определите, при каких значениях аргумента p значение функции $K = 3p^2$:

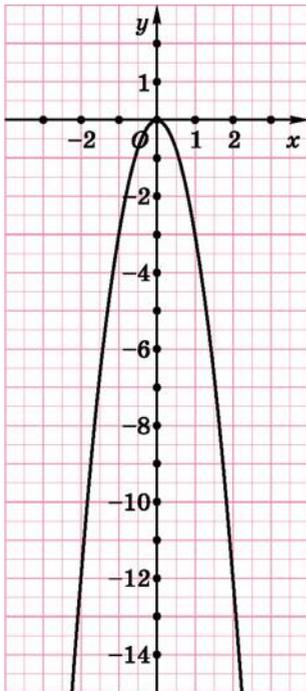
- а) меньше 12; г) не меньше 48;
 б) не больше 27; д) больше 75;
 в) больше 3; е) не больше 108.

768. Определите, возрастает или убывает на промежутке $[0; +\infty)$ функция:

- а) $y = 3x^2$; б) $z = -\frac{1}{2}t^2$; в) $Q = \frac{1}{2}s^2$; г) $z = -3a^2$.

769. Определите, возрастает или убывает функция $S = -2c^2$ на промежутке:

- а) $[-4; -1]$; в) $[-14; 0]$;
 б) $[4; 10]$; г) $[0; 47]$.



770. Запишите уравнение параболы, изображенной на рисунке:

- а) 326; в) 328;
 б) 327; г) 329.

771. Начертите график функции:

- а) $y = 2,5x^2 - 2$; б) $y = 2,5x^2 + 2$;

Рис. 326

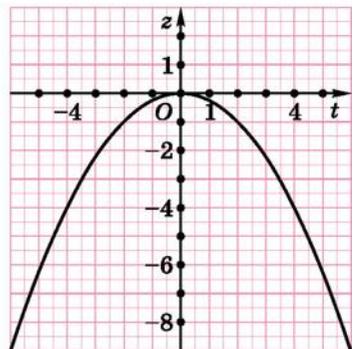


Рис. 327

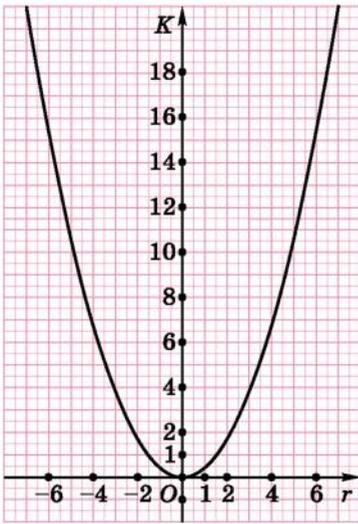


Рис. 328

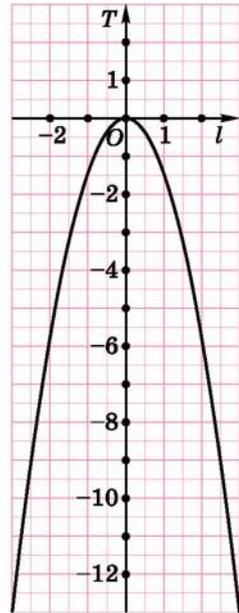


Рис. 329

- в) $z = -\frac{3}{7}a^2 - 4$; д) $T = \frac{1}{9}k^2 + 7$;
 г) $z = -\frac{3}{7}a^2 + 4$; е) $S = 9b^2 - 3,6$.

772. Напишите уравнение параболы, начертите ее и найдите точки пересечения с осью абсцисс, учитывая, что она получена из параболы:

- а) $u = -3,5t^2$ сдвигом вдоль оси ординат на 4 единицы вверх;
 б) $v = \frac{5}{6}r^2$ сдвигом вдоль оси ординат на 4 единицы вниз;
 в) $d = 7,3a^2$ сдвигом вдоль оси ординат на $\frac{2}{3}$ единицы вниз;
 г) $f = -\frac{7}{13}q^2$ сдвигом вдоль оси ординат на $\frac{2}{3}$ единицы вверх.

773. Ответьте, как нужно сдвинуть параболу $D = u^2$, чтобы получить параболу, которая является графиком функции:

- а) $D = u^2 - 9$; г) $D = -u^2 + 2\frac{7}{29}$;
 б) $D = u^2 + \frac{7}{31}$; д) $D = -u^2 - 12$.
 в) $D = -u^2$;

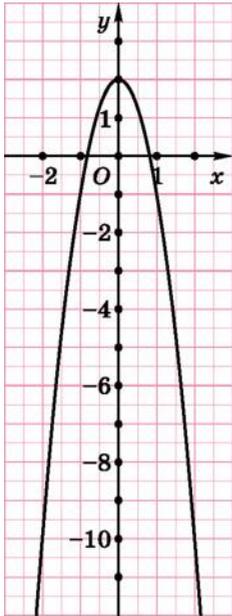
774. Начертите график функции:

- а) $y = 2,5(x - 2)^2$; г) $z = -\frac{3}{7}(a + 4)^2$;
 б) $y = 2,5(x + 2)^2$; д) $T = \frac{1}{9}(k + 7)^2$;
 в) $z = -\frac{8}{7}(a - 4)^2$; е) $S = 9(b - 3,6)^2$.

775. Запишите уравнение параболы, изображенной на рисунке:

- а) 330; б) 331; в) 332; г) 333.

776. Для функций $y = (x - 4)^2$, $z = -(t + 6)^2$, $A = 2(u - 1)^2$, $C = -3(v + 7)^2$, не вычерчивая их графиков, определите:



- а) положение вершины соответствующей параболы;
 б) имеет ли функция наибольшее или наименьшее значение;
 в) при каких значениях аргумента функция возрастает; убывает; обращается в нуль;
 г) в какой точке функция пересекает ось ординат.

Рис. 330

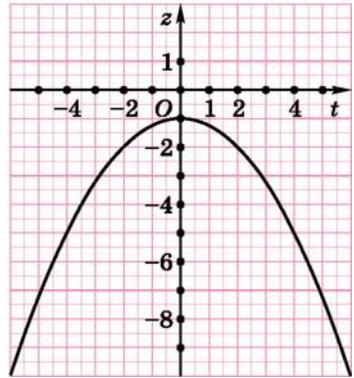


Рис. 331

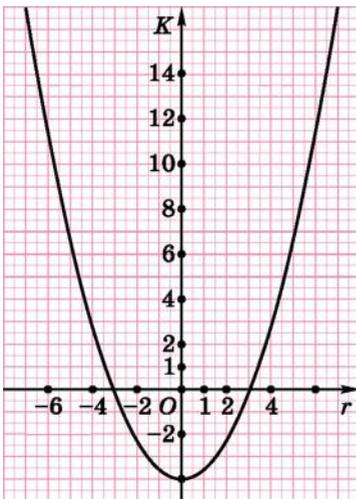


Рис. 332

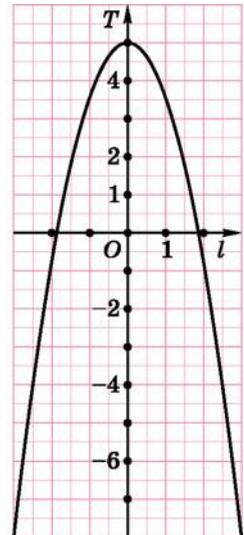


Рис. 333

777. Напишите уравнение параболы, начертите ее и найдите координаты точки пересечения с осью ординат, учитывая, что она получена из параболы:

- а) $u = -3,5t^2$ сдвигом вдоль оси абсцисс на 4 единицы влево;
 б) $v = \frac{5}{6}r^2$ сдвигом вдоль оси абсцисс на 4 единицы вправо.

778. Ответьте, как нужно сдвинуть параболу $D = u^2$, чтобы получить график функции:

- а) $D = (u - 9)^2$; в) $D = \left(u + \frac{7}{31}\right)^2$;
 б) $D = (u + 9)^2$; г) $D = \left(u - \frac{7}{31}\right)^2$.

779. Запишите уравнение параболы, изображенной на рисунке:

- а) 334; в) 336;
 б) 335; г) 337.

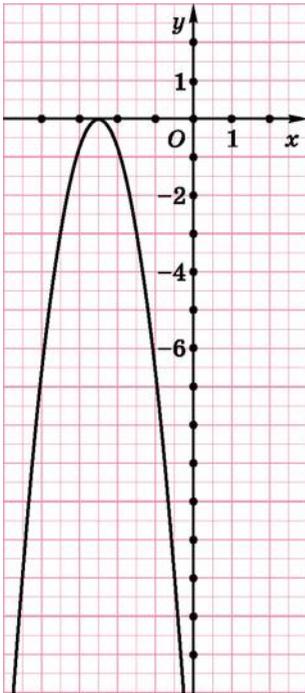


Рис. 334

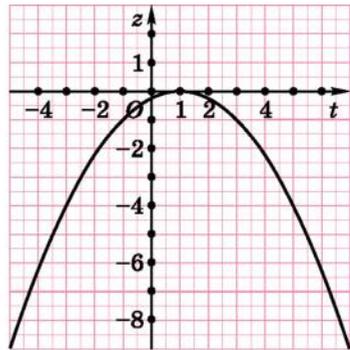


Рис. 335

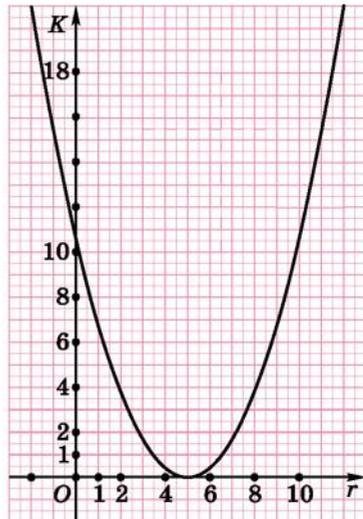


Рис. 336

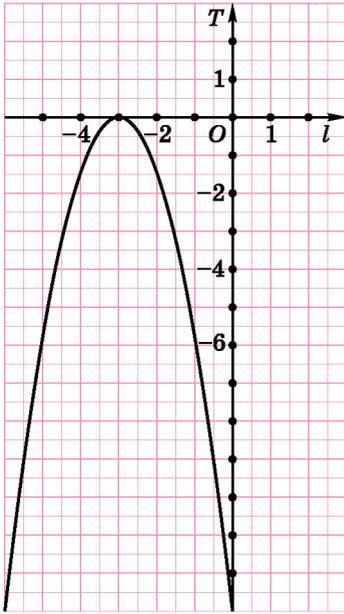


Рис. 337

780. Используя представление квадратом двучлена правой части формулы, постройте график функции:

а) $y = t^2 - 4t + 4$;

б) $H = r^2 - r + \frac{1}{4}$;

в) $P = -u^2 - 8u - 16$;

г) $G = 2l^2 - 32l + 128$.

781. Определите, при каком значении переменной a одна из точек пересечения параболы $y = (x - p)^2$ и прямой $y = 3x - 2$ имеет абсциссу, равную 2, и найдите координаты точек пересечения параболы и прямой.

782. Определите, при каком значении переменной a одна из точек пересечения параболы $S =$

$= -3(x - a)^2$ и прямой $S = -x - 2$ имеет абсциссу, равную 7, и найдите координаты точек пересечения параболы и прямой.

783. Запишите уравнение и начертите график функции, полученной из параболы $y = 0,2x^2$:

- а) сдвигом вдоль оси ординат на 4 единицы вверх;
- б) сдвигом вдоль оси ординат на 4,5 единицы вниз;
- в) сдвигом вдоль оси абсцисс на 3,5 единицы влево;
- г) сдвигом вдоль оси абсцисс на 6 единиц вправо;
- д) симметричным отражением относительно оси абсцисс и сдвигом вдоль оси ординат на 3 единицы вверх;
- е) симметричным отражением относительно оси абсцисс и сдвигом вдоль оси ординат на 7 единиц вниз;
- ж) симметричным отражением относительно оси абсцисс и сдвигом вдоль оси абсцисс на 5 единиц влево;
- з) симметричным отражением относительно оси абсцисс и сдвигом вдоль оси абсцисс на 5,2 единицы вправо.

784. Начертите график функции:

а) $z = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + 2$;

в) $z = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$;

б) $z = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 2$;

г) $z = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$;

д) $z = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 2$;

ж) $z = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 2$;

е) $z = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 - 2$;

з) $z = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 - 2$.

785. Запишите уравнение параболы, изображенной на рисунке:

а) 338;

б) 339;

в) 340;

г) 341.

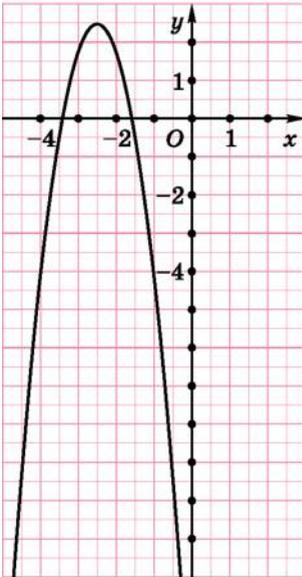


Рис. 338

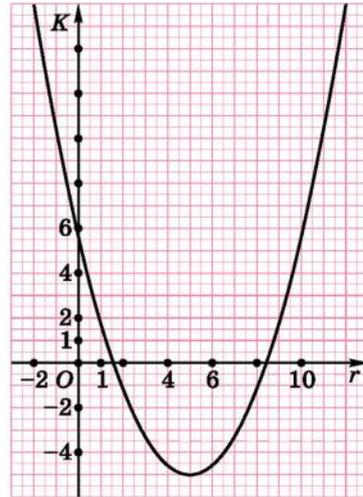


Рис. 340

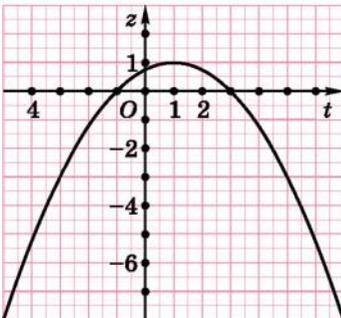


Рис. 339

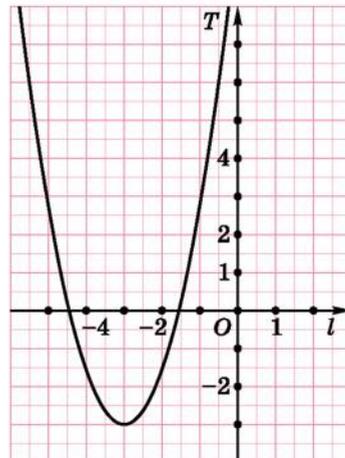


Рис. 341

786. Укажите координаты вершины параболы:

- а) $U = (x - 3)^2 - 4$; в) $B = -(r + 5)^2 - 2$;
б) $A = (t + 4)^2 + 2$; г) $K = -4(b + 1,5)^2 - 3,5$.

787. Выделите полный квадрат в трехчлене и начертите график функции:

- а) $y = a^2 - 6a + 1$; в) $S = 2c^2 - 6c + 11$;
б) $t = x^2 + 4x + 1$; г) $R = m^2 - m - 7$.

788. Найдите координаты вершины параболы:

- а) $y = x^2 + 2$; г) $x = -4b^2 + b$;
б) $z = -t^2 - 6$; д) $D = 3r^2 - 3,2$;
в) $t = 3a^2 - 2a$; е) $F = -4t^2 - 9t$.

789. На оси абсцисс найдите точку, через которую проходит ось симметрии параболы:

- а) $y = t^2 + 3$; в) $l = b^2 + b + 1$;
б) $g = -3(c - 2)^2 + 2$; г) $S = -3r^2 - 4r - 5$.

790. Определите, проходит ли ось симметрии параболы $z = x^2 - 8x$ через точку:

- а) (4; 10); в) (4; 0); д) (4; -136);
б) (5; -10); г) (-4; 16); е) (4; 2006).

791. Найдите координаты точек, в которых оси координат пересекает парабола:

- а) $y = t^2 - 3t + 2$; в) $D = -3v^2 - 6v - 8$;
б) $p = -2a^2 + 3a - 1$; г) $S = -4k^2 - 6k + 8$.

792. Напишите уравнение квадратной функции, учитывая, что:

- а) вершина ее графика находится в точке (1; -2), а старший коэффициент равен 3;
б) вершина ее графика находится в точке (-1; 5) и графику принадлежит точка (1; 1);
в) ее график проходит через точки (1; -3), (2; 2) и свободный член равен 2;
г) ее график проходит через точки (0; -4), (1; -2) и (-1; -12).

793. Найдите уравнение квадратной функции, график которой пересекает ось абсцисс в точках А (-1; 0) и В (3; 0), а ось ординат — в точке С (0; 2).

794. Постройте график функции:

- а) $y = b^2 + 2b - 3$; в) $D = k^2 - 7k + 13$; д) $A = r^2 - 6r$;
б) $u = -c^2 + 2c + 3$; г) $T = -s^2 + 6s - 10$; е) $B = -t^2 + 3,5$.

795. Постройте график функции:

- а) $y = x^2 - 7x + 10$; д) $A = k^2 - 5k + 6$;
б) $z = \frac{1}{4}t^2 + \frac{9}{4}t + 5$; е) $B = -6l^2 + l + 1$;
в) $U = -3a^2 + 5a + 2$; ж) $S = \frac{1}{2}r^2 - 3r - 8$;
г) $V = 3b^2 - 4b$; з) $T = 3m^2 + 7m$.

796. Постройте график функции:

- а) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$; д) $S = 2t^2 + 5$;
б) $A = \frac{1}{3}y^2 + 2y + 5$; е) $R = -3m^2 + 4$;
в) $X = -\frac{1}{3}a^2 + 2a + 1$; ж) $B = 2z^2 - 3z$;
г) $B = -\frac{1}{3}c^2 - \frac{1}{3}c + 1\frac{2}{3}$; з) $C = -2l^2 + 5l$.

797. Выделите полный квадрат в трехчлене:

- а) $a^2 - 2a + 5$; д) $c^2 - 2a - 5$;
б) $2p^2 - 8p + 7$; е) $2r^2 - 8r - 7$;
в) $b^2 + 2b + 5$; ж) $d^2 + 2a - 5$;
г) $2q^2 + 8q + 7$; з) $2s^2 + 8s - 7$.

798. Разложите на множители трехчлен:

- а) $7a^2 + a - 8$; в) $b^2 - b - 110$;
б) $x^2 - 8x + 15$; г) $5y^2 + 8y + 3$.

799. Сократите дробь:

- а) $\frac{7 - 7a}{7a^2 + a - 8}$; в) $\frac{b^2 - 22 - 9b}{b^2 - b - 110}$;
б) $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25}$; г) $\frac{11y^2 - 3y - 14}{5y^2 + 8y + 3}$.

800. Один из отрезков, на которые биссектриса разделила сторону треугольника, оказался равным одной из двух других сторон, равных 60 мм и 90 мм. Найдите третью сторону треугольника.

801. Углы против оснований в двух равнобедренных треугольниках равны друг другу. Основание и боковая сторона одного из них равны 18 см и 15 см соответственно. Найдите основание другого треугольника, учитывая, что его высота, проведенная к основанию, равна 16 см.

802. Угол B треугольника ABC равен углу Q треугольника PQR , сторона AB в 2 раза больше стороны PQ , а сторона QR составляет $\frac{1}{2}$ стороны BC . Найдите стороны AC и PR , учитывая, что одна из них на 4 см длиннее.

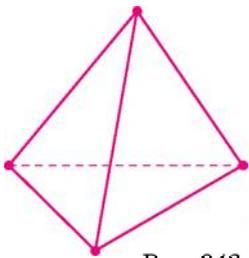


Рис. 342

803. Найдите полную поверхность пирамиды (рис. 342), все грани которой — равносторонние треугольники со стороной 4 см.

804. Треугольную пирамиду, все грани которой — равносторонние треугольники со стороной 6 см, развернули на плоскость (рис. 343). Докажите, что полученная развертка есть равносторонний треугольник со стороной 12 см.

805. Тело $SABC$ на рисунке 344 — треугольная пирамида, все грани которой — равносторонние треугольники со стороной 8 см. Точка D — середина ребра SC . Найдите площадь треугольника ADB .

806. Частное от деления одного целого числа на другое равно 4, а остаток — 30. Найдите делимое и делитель, если сумма делимого, делителя, частного и остатка равна 574.

807. Три автомобиля выехали из одного пункта и движутся по одному маршруту со скоростями 50 км/ч, 60 км/ч и 75 км/ч. Первый выехал в 8 ч, второй — в 9 ч 30 мин. Когда выехал из этого же пункта третий автомобиль, если он одновременно со вторым догнал первый?

Рис. 343

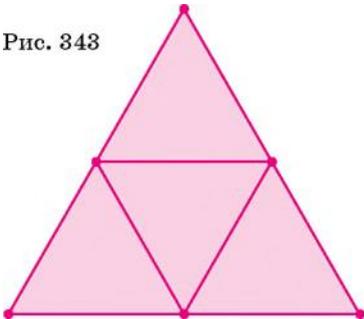
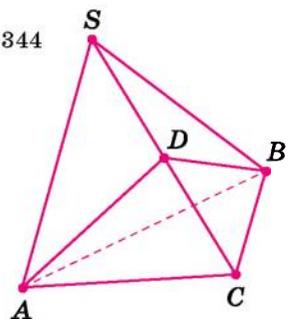


Рис. 344



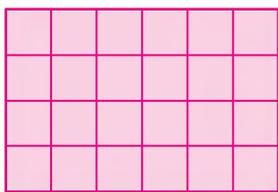


Рис. 345

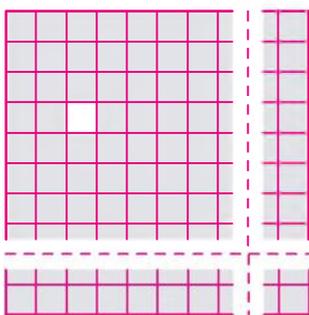


Рис. 346



Рис. 347

808. Три числа в сумме дают 100. Найдите эти числа, учитывая, что первое при делении на третье дает в частном 3 и в остатке 7, а второе при делении на третье дает в частном 2 и в остатке 3.

809. Три числа в сумме дают 100. Найдите эти числа, учитывая, что первое при делении на второе дает в частном 3 и в остатке 7, а второе при делении на третье дает в частном 2 и в остатке 3.

* * *

810. На доске записано 10 последовательных натуральных чисел, сумма цифр которых равна 56. Сколько раз в этой записи использована цифра 1?

811. Произведение трех положительных чисел равно 1, а сумма этих чисел больше суммы обратных им чисел. Докажите, что из трех данных чисел точно одно больше 1.

812. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре построили окружность, которая проходит через середину диагонали AC и пересекает сторону AB в точке K . Найдите отношение $AK : KB$, учитывая, что $AC = 3 \cdot BD$.

813. Прямоугольник размерами 4 на 6 клеток (рис. 345) нужно разрезать на четыре равные фигуры. Сколькими способами можно это сделать, если разрезы разрешается вести по сторонам клеток? (Два разреза считаются разными, если в результате получаются неравные фигуры.)

814. Квадратная картонка прямыми, параллельными ее сторонам, разделена на 2^n равных квадрата, из которых один выбросили (рис. 346). Докажите, что полученную фигуру можно замостить без перекрытий и пропусков уголками из трех квадратиков, один из которых показан на рисунке 347.

815. Сколькими способами число 2007 можно представить разностью квадратов двух натуральных чисел?

VI раздел

Подобные треугольники

24. Пропорциональные отрезки

А. В жизни мы часто встречаемся с проявлениями подобия. На фотографиях, представленных на рисунках 348 и 349, изображен один и тот же мальчик, эти изображения подобны друг другу и отличаются только размерами. Подобными являются изображения местности на картах разных масштабов (рис. 350 и 351).

В таблице приведены расстояния между населенными пунктами Ивоны, Усполье и Парадино (см. карты, представленные на рисунках 350 и 351).

	Расстояние в миллиметрах на карте масштабом	
	1 : 500 000	1 : 750 000
Ивоны—Усполье	39	26
Ивоны—Парадино	63	42
Усполье—Парадино	60	40



Рис. 348



Рис. 349



Рис. 350



Рис. 351
 Правообладатель Народная асвета

Можно заметить, что отношения расстояний между пунктами, приведенными в таблице, равны друг другу:

$$\frac{39}{26} = \frac{63}{42} = \frac{60}{40}.$$

Фигуры одинаковой формы в геометрии называют *подобными*. Отношение расстояний между соответствующими точками подобных фигур одно и то же для любой пары точек.

Основу теории подобия составляет следующая теорема.

Теорема 1. *Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то эти прямые на другой стороне высекают также равные отрезки.*

Доказательство. Пусть на одной стороне угла A отложены равные отрезки PQ и RS . Через концы этих отрезков проведены параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла A в точках P_1, Q_1, R_1, S_1 (рис. 352). Докажем, что отрезки P_1Q_1 и R_1S_1 равны.

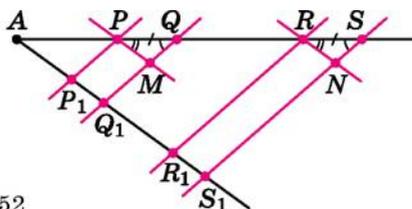


Рис. 352

Через точки P и R проведем прямые, параллельные другой стороне угла, которые пересекают прямые QQ_1 и SS_1 в точках M и N соответственно.

Треугольники PQM и RSN равны, так как их стороны PQ и RS равны по условию, углы PQM и RSN равны как соответственные при параллельных QQ_1 и SS_1 , пересеченных прямой AS , углы QPM и SRN равны как соответственные при параллельных PM и RN , пересеченных прямой AS . Поэтому соответствующие стороны PM и RN этих треугольников равны друг другу.

Четырехугольники PP_1Q_1M и RR_1S_1N — параллелограммы. Поэтому отрезки P_1Q_1 и R_1S_1 равны соответственно отрезкам PM и RN .

Поскольку отрезки PM и RN равны друг другу, то равны друг другу и отрезки P_1Q_1 и R_1S_1 .

Теорема 1 называется теоремой Фалеса. Фалес Милетский (624—548 до н. э.) (рис. 353) — древнегреческий математик, астроном и философ, который, как считают, был первым греческим геометром.



Рис. 353

Теорема 2. Если от вершины угла отложить последовательно на одной его стороне равные друг другу отрезки и на другой стороне также равные друг другу отрезки, то прямые, проходящие через соответствующие концы отложенных отрезков, параллельны.

Доказательство. Пусть на одной стороне угла C от его вершины отложены равные отрезки CM и MN , на другой стороне — равные отрезки CP и PQ (рис. 354).

Докажем, что прямые MP и NQ параллельны. Проведем через точку N прямую, параллельную прямой MP . Пусть эта прямая пересекает сторону CP в точке Q_1 . Тогда, в соответствии с теоремой 1, $PQ_1 = CP$. Но, в соответствии с условием, $CP = PQ$. Поэтому $PQ_1 = PQ$, а это означает, что точка Q_1 совпадает с точкой Q . Значит, прямая NQ_1 совпадает с прямой NQ , и поэтому прямая NQ параллельна прямой MP .

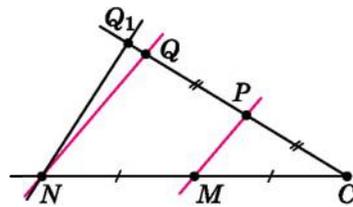


Рис. 354

Теорему Фалеса можно обобщить на так называемые пропорциональные отрезки.

Пары отрезков (AB, EF) и (MN, PQ) называют пропорциональными отрезками, если отношение отрезков одной пары равно отношению отрезков другой пары (рис. 355), т. е.

$$\frac{AB}{EF} = \frac{MN}{PQ}.$$

Б. Теорема 3. Если стороны угла пересечены тремя параллельными прямыми, то отношение отрезков, образованных на одной стороне угла, равно отношению соответствующих отрезков, образованных на другой стороне угла.

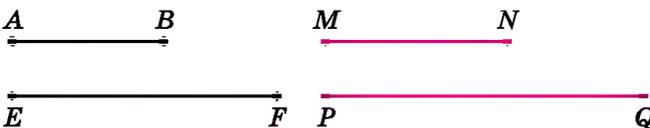


Рис. 355

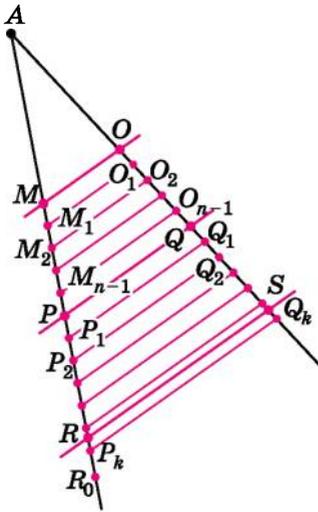


Рис. 356

Доказательство. Пусть три параллельные прямые пересекают стороны угла A : одна в точках M и O , другая в точках P и Q , третья в точках R и S , причем точки M, P, R принадлежат одной стороне угла, а точки O, Q, S — другой (рис. 356). Докажем, что $\frac{MP}{PR} = \frac{OQ}{QS}$.

Допустим, что это не так. Пусть для определенности $\frac{MP}{PR} > \frac{OQ}{QS}$. Тогда на луче PR за точкой R выберем точку R_0 так, что $\frac{MP}{PR_0} = \frac{OQ}{QS}$. Отрезок MP разделим на такие равные отрезки $MM_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}P$, что каждый из них меньше отрезка RR_0 .

Пусть этих отрезков-долей имеется n , а длина отрезка-доли равна l . На луче PR от точки R будем последовательно откладывать отрезки $PP_1, P_1P_2, \dots, P_{k-1}P_k$ длиной l до того момента, пока конец P_k такого отрезка не окажется на отрезке RR_0 . Такой момент обязательно наступит, так как длина l отрезка, который откладывается, меньше RR_0 . Через точки деления $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, P_1, P_2, \dots, P_k$ проведем прямые, параллельные прямой PQ . На прямой OS образуются точки деления $O_1, O_2, \dots, O_{n-1}, Q_1, Q_2, \dots, Q_k$. При этом отрезок QQ_k длиннее отрезка QS . По теореме Фалеса на прямой OS образуются равные отрезки определенной длины l_1 . Отрезок OQ окажется разделенным на n отрезков длиной l_1 , а отрезок QS — на k таких же отрезков. Поэтому

$$\frac{MP}{PP_k} = \frac{n}{k} = \frac{OQ}{QQ_k}$$

Но $\frac{MP}{PR_0} < \frac{MP}{PP_k} = \frac{OQ}{QQ_k} < \frac{OQ}{QS}$. Вместе с этим точка R_0 выбрана

так, что $\frac{MP}{PR_0} = \frac{OQ}{QS}$. Полученное противоречие заставляет отклонить допущение о том, что равенство $\frac{MP}{PR} = \frac{OQ}{QS}$ неверно, и тем самым признать это равенство верным.

Теорема 3 позволяет утверждать, что если даны угол A и прямая p (рис. 357), то любая пара прямых, параллельных прямой p , отсекает на сторонах угла пару отрезков,

отношение длин которых постоянно и определяется только направлением прямой p .

Теорема 4. Если от вершины угла отложить последовательно на одной его стороне два отрезка, а на другой стороне два пропорциональных им отрезка, то прямые, проходящие через соответствующие концы отложенных отрезков, параллельны.

Доказательство. Пусть на одной стороне угла D от его вершины отложены последовательно два каких-либо отрезка DR и RS , на другой стороне — пропорциональные им отрезки DT и TV (рис. 358), т. е. $\frac{DR}{DT} = \frac{RS}{TV}$.

Докажем, что прямые RT и SV параллельны. Через точку S проведем прямую, параллельную прямой RT . Пусть проведенная прямая пересекает сторону DT в точке V_1 . Тогда, в соответствии с теоремой 3, $\frac{DR}{DT} = \frac{RS}{TV_1}$. Поэтому

$\frac{RS}{TV_1} = \frac{RS}{TV}$ и $TV_1 = TV$, а это означает, что точка V_1 совпадает с точкой V . Значит, прямая SV_1 совпадает с прямой SV , и поэтому прямая SV параллельна прямой RT .

В. Рассмотрим три основные задачи на построение, при решении которых используется пропорциональность отрезков.

Задача 1. Разделим данный отрезок на n отрезков-долей.

Пусть AB — данный отрезок, который нужно разделить, например, на 5 долей (рис. 359).

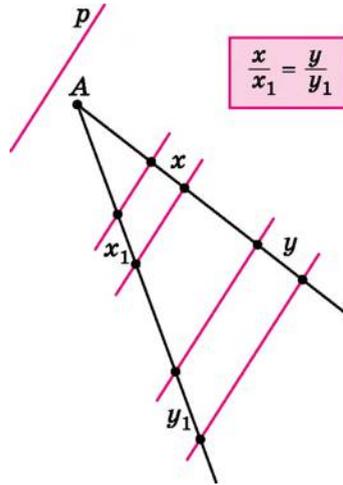


Рис. 357

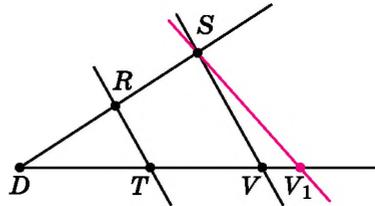


Рис. 358



Рис. 359

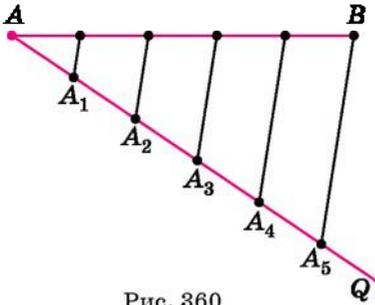


Рис. 360

С одного из концов отрезка, например A , проведем какой-либо луч AQ , не принадлежащий прямой AB (рис. 360). От точки A на луче AQ последовательно отложим 5 равных отрезков $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5$. Конец последнего из них — точку A_5 — соединим с другим концом B данного отрезка AB . Через точки A_1, A_2, A_3, A_4 проведем прямые, параллельные прямой A_5B , которые, в соответствии с теоремой Фалеса, разделят отрезок AB на 5 долей.

Задача 2. Разделим данный отрезок в данном отношении $\frac{m}{n}$.

Пусть UV — данный отрезок, который нужно разделить в данном отношении, например $\frac{3}{5}$ (рис. 361), т. е. найти такую точку A , что $\frac{UA}{AV} = \frac{3}{5}$.

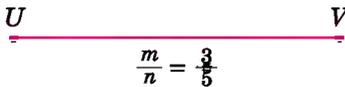


Рис. 361

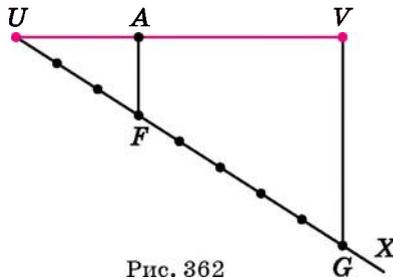


Рис. 362

Учитывая решение задачи 1, можно на луче UX от точки U отложить 3 равных отрезка и получить точку F , от которой далее отложить 5 таких же отрезков и получить точку G (рис. 362). Точку G соединить с другим концом V данного отрезка и через точку F провести прямую, параллельную прямой GV , точка A пересечения которой с отрезком UV делит его в нужном отношении $\frac{3}{5}$.

Задача 3. Построим отрезок, четвертый пропорциональный трем данным отрезкам.

Пусть AB, CD и EF — данные отрезки (рис. 363). Построим такой отрезок XY , что $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{XY}$.

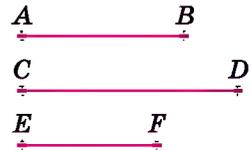


Рис. 363

Построим произвольный угол S и от его вершины на одной стороне отложим

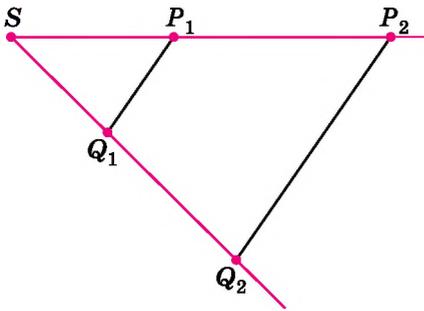


Рис. 364

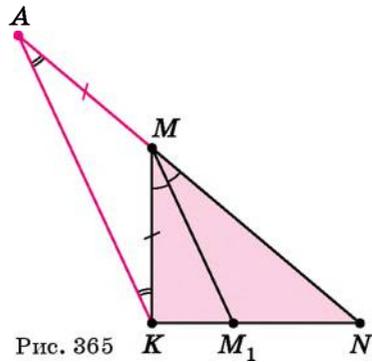


Рис. 365

отрезок SP_1 , равный отрезку AB , и отрезок P_1P_2 , равный отрезку CD , на другой стороне — отрезок SQ_1 , равный отрезку EF (рис. 364). Прямая, параллельная P_1Q_1 , проведенная через точку P_2 , пересекает другую сторону в точке Q_2 , а отрезок Q_1Q_2 является искомым отрезком XY , что следует из теоремы 3.

Г. Теорема 5. *Биссектриса треугольника делит противоположащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.*

Доказательство. Пусть MM_1 — биссектриса треугольника KMN (рис. 365). Докажем, что $\frac{NM_1}{M_1K} = \frac{NM}{MK}$.

Повернем отрезок MK вокруг точки M так, чтобы он оказался на прямой MN и занял положение MA . Получим равнобедренный треугольник KMA с основанием KA . Его углы KAM и AKM равны друг другу. Угол AMK , как вместе с этими углами, так и вместе с углом KMN , составляет 180° . Поэтому угол KMN равен сумме углов KAM и AKM , а тогда половина этого угла, т. е. угол KMM_1 или угол NMM_1 равен одному из этих углов KAM или AKM . Значит, все четыре угла KMM_1 , NMM_1 , KAM , AKM равны друг другу.

Поскольку углы KAM и NMM_1 являются соответственными углами при прямых AK и MM_1 , пересеченных прямой AN , то прямые AK и MM_1 параллельны.

Применив теорему 2 к углу KNA , пересеченному параллельными прямыми AK и MM_1 , получаем:

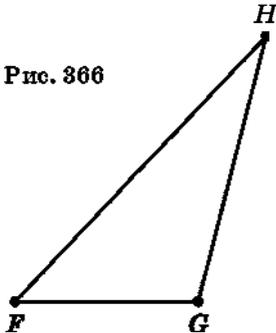
$$\frac{NM_1}{M_1K} = \frac{NM}{MA}.$$

Но $MA = MK$, поэтому окончательно

$$\frac{NM_1}{M_1K} = \frac{NM}{MK}.$$

- ?
1. Сформулируйте теорему Фалеса.
 2. Какие отрезки называют пропорциональными?
 3. Сформулируйте теорему о пропорциональных отрезках.
 4. Как данный отрезок разделить на несколько равных долей?
 5. Как данный отрезок разделить в данном отношении?
 6. Как построить отрезок, четвертый пропорциональный трем данным отрезкам?
 7. Сформулируйте свойство биссектрисы треугольника.

816. Измерьте стороны треугольника FGH на рисунке 366 и найдите отношение:



- а) стороны FG к стороне GH ;
- б) стороны FG к стороне FH ;
- в) стороны FH к стороне GH ;
- г) стороны GH к стороне FG .

817. Может ли отношение катета прямоугольного треугольника к его гипотенузе быть:

- а) меньше единицы;
- б) равно единице;
- в) больше единицы?

818. Найдите отношение:

- а) стороны треугольника к его средней линии, параллельной этой стороне;
- б) средней линии трапеции к отрезку, равному сумме оснований трапеции;
- в) отрезка, равного сумме средних линий треугольника, к отрезку, равному сумме его сторон;
- г) гипотенузы прямоугольного треугольника к радиусу окружности, которая проходит через его вершины.

819. Найдите отношение гипотенузы к проведенной к ней высоте v :

- а) равнобедренном прямоугольном треугольнике;
- б) прямоугольном треугольнике, один из углов которого равен 30° .

820. Используя карту на рисунке 350, найдите действительное расстояние между:

- | | |
|------------------------|------------------------------|
| а) Ивонами и Успољем; | г) Заболотьем и Людогощей; |
| б) Ивонами и Парадино; | д) Ослянкой и Андранами; |
| в) Успољем и Парадино; | е) Пячковичами и Деснокитой. |

821. Точка X делит отрезок AB в отношении $1:3$, если считать от точки A . Найдите отношение:

- а) отрезка AX к отрезку AB ;
- б) отрезка AB к отрезку AX ;
- в) отрезка BX к отрезку AB ;
- г) отрезка BX к отрезку AX .

822. Точка N делит отрезок XY в отношении $a:b$, если считать от точки X . Найдите отношение:

- а) отрезка XN к отрезку XY ;
- б) отрезка XY к отрезку XN ;
- в) отрезка YN к отрезку XY ;
- г) отрезка YN к отрезку XN .

823. Определите, пропорциональны ли пары отрезков $(AB; CD)$ и $(MN; PQ)$, если:

- а) $AB = 0,9$ см; $CD = 0,4$ см; $MN = 3,6$ см; $PQ = 1,6$ см;
- б) $AB = 9$ см; $CD = 35$ мм; $MN = 18$ мм; $PQ = 0,7$ см;
- в) $AB = 24$ дм; $CD = 360$ см; $MN = 30$ см; $PQ = 450$ мм.

824. Известно, что $MN = 4$ см, $PQ = 3$ см, $XY = 6$ см. Каким должен быть отрезок AB , чтобы все четыре отрезка были пропорциональны и отрезок AB был:

- а) наибольшим;
- б) наименьшим;
- в) ни наибольшим, ни наименьшим?

825. На отрезке MN длиной 6 см выбрана точка X так, что $MX : XN = 3 : 2$, на прямой MN выбрана точка Y так, что $MY : YN = 3 : 4$. Найдите возможные расстояния между точками X и Y .

826. Отрезок PQ длиной l точкой A разделен на отрезки-части PA и AQ , отношение которых равно $\frac{x}{y}$. Выразите длины отрезков PA и AQ через l , x и y .

827. Используя теорему Фалеса, докажите, что средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине.

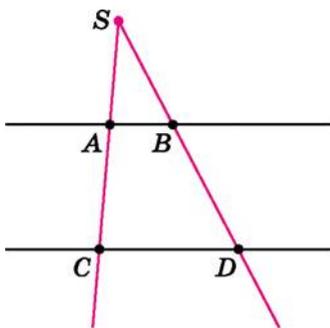


Рис. 367

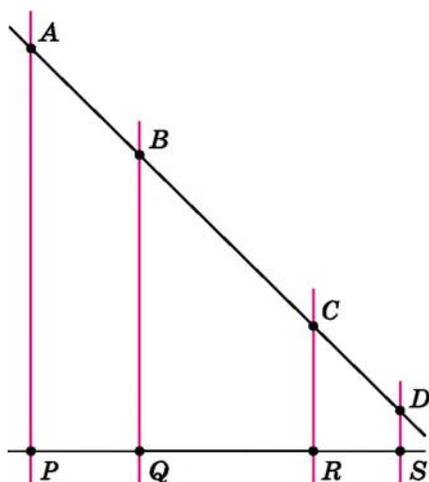


Рис. 368

828. Параллельные прямые пересекают одну сторону угла S в точках A и C , другую — в точках B и D (рис. 367). Найдите:

- а) SD , если $SA = 6$ см, $SC = 9$ см, $SB = 10$ см;
- б) SA , если $SA + SC = 14$ см, $SB = 15$ см, $SD = 20$ см;
- в) SC , если $SB : SD = 10 : 13$, $AC = 12$ см.

829. Две прямые пересечены рядом параллельных прямых AP , BQ , CR , DS (рис. 368). Найдите отрезки AB и BC , учитывая, что $PS = 85$ мм, $PR = 65$ мм, $PQ = 25$ мм, $CD = 45$ мм.

830. Через точку A стороны CD треугольника CDE параллельно стороне CE проведена прямая, которая пересекает сторону DE в точке B . Найдите расстояние между точками B и E , учитывая, что $CA : AD = 6 : 7$, а $DE = 91$ см.

831. На одной стороне угла A выбраны точки C и D , на другой — точки K и L . Можно ли утверждать, что прямые CK и DL параллельные, если:

- а) $AC = CD$ и $AK = KL$;
- б) $AC = AK$ и $CD = KL$;
- в) $AD = AL$ и $CD = KL$;
- г) $AC = KL$ и $AK = CD$?

832. На одной стороне угла S выбраны точки A и D , на другой — точки C и E . Определите взаимное расположение прямых AC и DE , учитывая, что:

- а) $AS : AD = 5 : 3$, $CE = 18$ дм, $CS = 30$ дм;
- б) $SD : AD = 12 : 8,5$, $CS = \frac{7}{17} CE$;
- в) $SA = \frac{7}{16} SD$, $CS = 5,6$ м, $CE = 4$ м.

833. Длина отрезка DE равна 10 см. Постройте окружности с центрами в точках D и E , учитывая, что их радиусы относятся как $2 : 3$ и окружности касаются:

- а) внешним образом; б) внутренним образом.

834. Выберите произвольно две точки A и B . Постройте окружности с центрами в точках A и B , учитывая, что их радиусы относятся как $1 : 3$ и окружности касаются:

- а) внешним образом; б) внутренним образом.

835. Отрезок GA — биссектриса треугольника FGH . Найдите:

- а) отрезки FA и AH , учитывая, что $FG = 12$ см, $GH = 18$ см, $FH = 24$ см;
б) сторону GH , учитывая, что $FA : AH = 7 : 5$ и $FG = 21$ м;
в) сторону FH , учитывая, что $FG : GH = 3 : 7$ и $AH - AF = 4$ см.

836. В треугольнике со сторонами 12 см и 9 см проведена биссектриса к третьей стороне. При этом оказалось, что один из отрезков, на которые биссектриса разделила эту сторону, равен одной из данных сторон. Найдите третью сторону.

837. Стороны LM , KM , KL треугольника KLM соответственно равны 15 см, 18 см, 21 см. На этих сторонах выбраны точки D , C , B так, что четырехугольник $LBCD$ — ромб. Найдите отрезки KC и CM .

838. Точка Q на стороне треугольника длиной 80 см равноудалена от двух других сторон длиной 39 см и 65 см. Найдите отрезки-части, на которые точка Q разделяет сторону треугольника.

839. Сторона CD треугольника CDE разделена на 4 доли. Через точки деления проведены прямые, параллельные стороне CE , которая равна 20 см. Найдите отрезки параллельных прямых, ограниченные сторонами треугольника.

840. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, равна 30 см и составляет 150 % его. На ней выбрана точка, равноудаленная от всех сторон. Найдите отрезки, на которые эта точка разделяет высоту.

841. На высоте равнобедренного треугольника с боковой стороной 65 см выбрана точка, которая делит эту высоту в отношении 13 : 5 и равноудаленная от всех сторон. Найдите:
 а) основание треугольника;
 б) расстояние от выбранной точки до сторон треугольника.

842. В равнобедренном треугольнике с периметром 81 см проведена высота к основанию. Точка Q делит высоту в отношении 7 : 2 и равноудалена от сторон. Найдите стороны треугольника и расстояние до них от точки Q .

843. Стороны AB и AC треугольника ABC равны соответственно 10 см и 15 см. Через конец D биссектрисы AD параллельно стороне AB проведена прямая, которая пересекает сторону AC в точке E . Найдите отрезки EA и EC .

844. Решите уравнение:

а) $x^2 + 2x - 4 = |3x - 2|$;

б) $|x + 1|^2 = \left|3x + \frac{25}{8}\right| - \frac{17}{8}$.

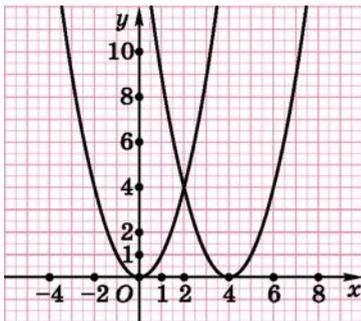


Рис. 369

845. Решите неравенство:

а) $\frac{5x - 1}{2} + \frac{3 - x}{6} \leq \frac{11x - 1}{8}$;

б) $\frac{5y + 2}{2} - \frac{4y + 1}{3} \geq \frac{4y - 13}{7}$.

846. На рисунке 369 показаны графики функций $y = x^2$ и $y = (x - a)^2$. Найдите число a и координаты точек пересечения графиков с координатными осями.

* * *

847. В классе 27 учеников. Каждый мальчик дружит с четырьмя девочками класса, а каждая девочка — с пятью мальчиками. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

848. Есть сороказначное число 199619971998...200320042005. Оно произвольным образом разделяется на два числа, и эти

числа складываются. С полученным числом выполняют такие же действия до того момента, пока не получится однозначное число. Какое это число?

849. В прямоугольном треугольнике с катетами AC и BC , равными 8 см и 15 см, провели высоту CH . Найдите расстояние между основаниями F и G биссектрис CF и CG треугольников CHA и CHB .

25. Подобные треугольники

Интуитивно мы достаточно хорошо распознаем подобные предметы, выделяем их среди других. Однако выразить эти представления точным математическим языком не очень просто. Начнем изучение отношения подобия с простейшей геометрической фигуры — треугольника.

А. Треугольники, углы которых попарно равны, а соответствующие стороны пропорциональны, называют **подобными**.

У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ на рисунках 370 и 371 углы A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 равны друг другу, а стороны треугольника $A_1B_1C_1$ в полтора раза меньше соответствующих сторон треугольника ABC , т. е. для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ истинны равенства:

$$\angle A = \angle A_1; \angle B = \angle B_1; \angle C = \angle C_1; \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Поэтому треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$.

Утверждение о подобии треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ коротко записывают так: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Число k , равное отношению соответствующих сторон подобных треугольников, называют **коэффициентом подобия**.

Поскольку стороны треугольника ABC на рисунке 370 в $1\frac{1}{2}$ раза длиннее соответствующих сторон треугольника $A_1B_1C_1$

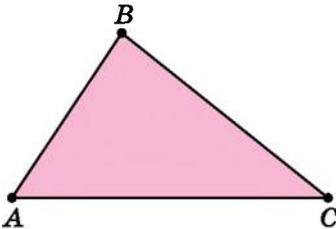


Рис. 370

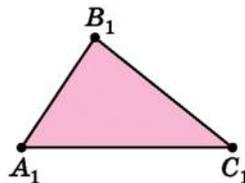


Рис. 371

на рисунке 371, то треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия $1\frac{1}{2}$. Можно сказать также, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{2}{3}$, так как стороны треугольника $A_1B_1C_1$ составляют $\frac{2}{3}$ соответствующих сторон треугольника ABC .

Понятно, что равные треугольники подобны друг другу с коэффициентом подобия 1.

Следующая теорема показывает, что подобные треугольники существуют.

Теорема 6. *Прямая, которая пересекает две стороны треугольника и параллельна третьей стороне, отсекает треугольник, подобный исходному.*

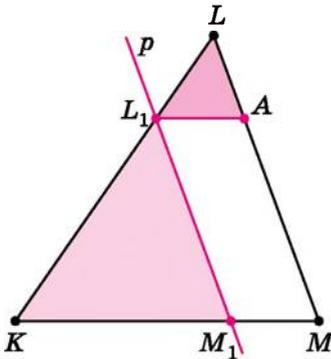


Рис. 372

Доказательство. Пусть прямая p , параллельная стороне LM треугольника KLM , пересекает его стороны KL и KM в точках L_1 и M_1 соответственно (рис. 372). Докажем, что треугольники KLM и KL_1M_1 подобны.

У этих треугольников угол K общий, а углы KLM и KL_1M_1 , а также KML и KM_1L_1 равны, так как это соответственные углы при параллельных LM и L_1M_1 , пересеченных один раз прямой KL , другой раз — прямой KM . Условие равенства соответственных углов подобных треугольников выполнено.

Установим пропорциональность соответствующих сторон. Поскольку прямые LM и L_1M_1 параллельны, то теорема 3 о пропорциональных отрезках позволяет записать пропорцию $\frac{L_1L}{KL_1} = \frac{M_1M}{KM_1}$. Прибавим к обеим частям этого равенства по единице и преобразуем новое равенство:

$$\frac{L_1L}{KL_1} + 1 = \frac{M_1M}{KM_1} + 1;$$

$$\frac{L_1L + KL_1}{KL_1} = \frac{M_1M + KM_1}{KM_1}.$$

Учитывая, что $L_1L + KL_1 = KL$, а $M_1M + KM_1 = KM$, можем записать

$$\frac{KL}{KL_1} = \frac{KM}{KM_1},$$

а это означает, что стороны KL и KL_1 , а также KM и KM_1 пропорциональны.

Остается доказать, что этим парам сторон пропорциональна и третья пара LM и L_1M_1 . Через точку L_1 параллельно стороне KM проведем прямую, которая пересекает сторону LM в точке A . Применив снова теорему 3, получим равенство

$$\frac{AM}{LA} = \frac{L_1K}{LL_1},$$

которое можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} \frac{LA}{AM} + 1 &= \frac{LL_1}{L_1K} + 1; \\ \frac{LA + AM}{AM} &= \frac{LL_1 + L_1K}{L_1K}; \\ \frac{LM}{AM} &= \frac{LK}{L_1K}. \end{aligned}$$

Но $AM = L_1M_1$, так как четырехугольник L_1AMM_1 — параллелограмм. Поэтому

$$\frac{LM}{L_1M_1} = \frac{KL}{L_1K}.$$

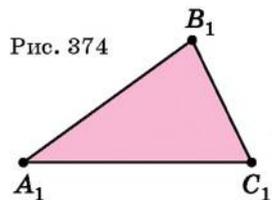
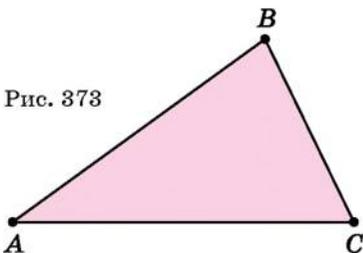
Учитывая полученную пропорцию $\frac{KL}{KL_1} = \frac{KM}{KM_1}$, получим:

$$\frac{KL}{KL_1} = \frac{KM}{KM_1} = \frac{LM}{L_1M_1}.$$

Б. Теорема 7. Если две стороны одного треугольника пропорциональны соответствующим сторонам другого треугольника, а углы между этими сторонами равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Пусть для треугольников ABC (рис. 373) и $A_1B_1C_1$ (рис. 374) истинны равенства:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}; \quad \angle A = \angle A_1.$$



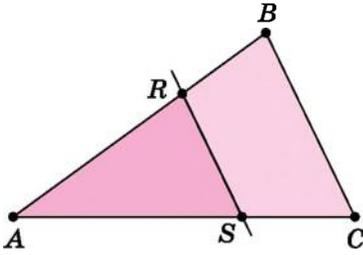


Рис. 375

На луче AB от вершины A отложим отрезок AR , равный отрезку A_1B_1 , и через точку R параллельно стороне BC проведем прямую, которая пересекает прямую AC в точке S (рис. 375). Получился треугольник ARS , который в соответствии с теоремой 6 подобен треугольнику ABC .

Докажем, что треугольник ARS равен треугольнику $A_1B_1C_1$. У них углы A и A_1 равны по условию, а стороны AR и A_1B_1 равны по построению.

В соответствии с теоремой 6 истинна пропорция $\frac{AB}{AR} = \frac{AC}{AS}$. Учитывая, что $AR = A_1B_1$, и сравнив эту пропорцию с данной по условию пропорцией $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, заключаем, что $\frac{AC}{AS} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Значит, $AS = A_1C_1$.

Значит, по первому признаку треугольник ARS равен треугольнику $A_1B_1C_1$.

Поскольку, по уже доказанному, треугольник ARS подобен треугольнику ABC , то и треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ARS , подобен треугольнику ABC .

Теорема 7 выражает первый признак подобия треугольников.

В. Теорема 8. Если два угла одного треугольника равны соответствующим углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Пусть углы D и E треугольника DEF (рис. 376) соответственно равны углам D_1 и E_1 треугольника $D_1E_1F_1$ (рис. 377).

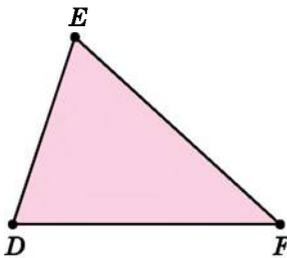


Рис. 376

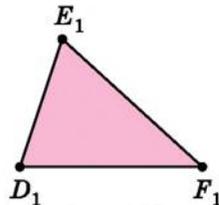


Рис. 377

На луче DE от вершины D отложим отрезок DM , равный отрезку D_1E_1 , и через точку M параллельно стороне EF проведем прямую, которая пересекает прямую DF в точке N (рис. 378). Полученный треугольник DMN , в соответствии с теоремой 6, подобен треугольнику DEF .

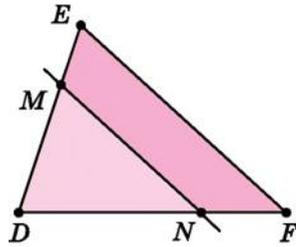


Рис. 378

Докажем, что треугольник DMN равен треугольнику $D_1E_1F_1$. У них стороны DM и D_1E_1 равны по построению, углы D и D_1 равны по условию, а углы DMN и E_1 равны углу E , и поэтому равны друг другу. Значит, по второму признаку равенства треугольников треугольник DMN равен треугольнику $D_1E_1F_1$.

Поскольку, по уже доказанному, треугольник DMN подобен треугольнику DEF , то и треугольник $D_1E_1F_1$, который равен треугольнику DMN , подобен треугольнику DEF .

Теорема 8 выражает второй признак подобия треугольников.

Г. Теорема 9. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Пусть для треугольников KLM (рис. 379) и $K_1L_1M_1$ (рис. 380) истинны равенства:

$$\frac{KL}{K_1L_1} = \frac{LM}{L_1M_1} = \frac{MK}{M_1K_1}.$$

На луче KL от вершины K отложим отрезок KA , равный отрезку K_1L_1 , и через точку A параллельно стороне LM проведем прямую, которая пересекает прямую KM в точке B

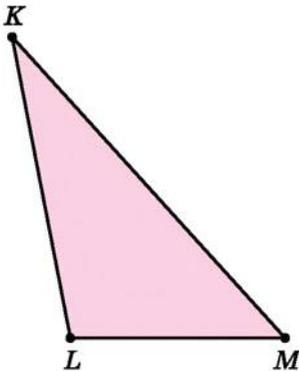


Рис. 379

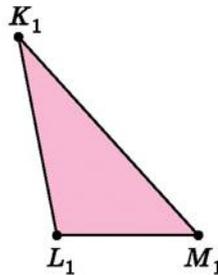


Рис. 380

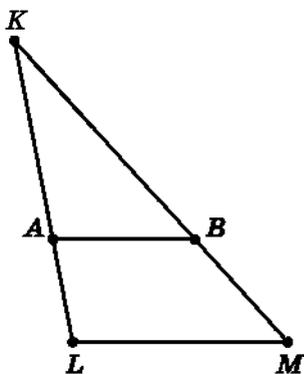


Рис. 381

(рис. 381). Полученный треугольник KAB в соответствии с теоремой 6 подобен треугольнику KLM . Докажем, что треугольник KAB равен треугольнику $K_1L_1M_1$.

Поскольку треугольник KAB подобен треугольнику KLM , то $\frac{KL}{KA} = \frac{LM}{AB}$. Вместе с этим по условию $\frac{KL}{K_1L_1} = \frac{LM}{L_1M_1}$. Поскольку в этих двух пропорциях по три компонента равны, то равны и четвертые ком-

поненты: $AB = L_1M_1$. Теперь, сравнив пропорцию $\frac{LM}{AB} = \frac{MK}{BK}$, которая следует из подобия треугольников KAB и KLM , с данной по условию пропорцией $\frac{LM}{L_1M_1} = \frac{MK}{M_1K_1}$ и приняв во внимание равенство $AB = L_1M_1$, получим: $BK = M_1K_1$.

Таким образом, каждая из сторон треугольника KAB равна соответствующей стороне треугольника $K_1L_1M_1$. Значит, эти треугольники равны по третьему признаку равенства треугольников.

Поскольку, по уже доказанному, треугольник KAB подобен треугольнику KLM , то и треугольник $K_1L_1M_1$, который равен треугольнику KAB , подобен треугольнику KLM .

Теорема 9 выражает третий признак подобия треугольников.

Мы доказали три признака подобия треугольников. Можно заметить, что они соответствуют тем признакам равенства треугольников, которые использованы при доказательстве теорем 7, 8, 9.

- ❓
1. Какие треугольники называются подобными?
 2. Что показывает коэффициент подобия?
 3. Чему равен коэффициент подобия равных треугольников?
 4. Как с помощью символов записывается утверждение о подобии треугольников ABC и $A_1B_1C_1$?
 5. Сформулируйте свойство прямой, которая параллельна какой-либо стороне треугольника и пересекает две другие его стороны.
 6. Сформулируйте первый признак подобия треугольников (по углу и прилежащим сторонам).
 7. Сформулируйте второй признак подобия треугольников (по двум углам).
 8. Сформулируйте третий признак подобия треугольников (по трем сторонам).

850. Одна прямая пересекает стороны угла K в точках M и N , другая прямая, параллельная первой, — в точках O и P (рис. 382). Запишите пропорцию, которая начинается с отношения:

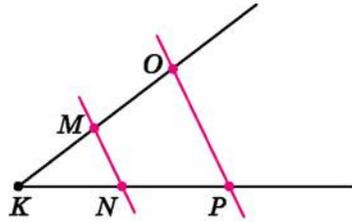


Рис. 382

- а) $\frac{KN}{KP}$; в) $\frac{KM}{MO}$;
 б) $\frac{OP}{MN}$; г) $\frac{KO}{MN}$.

851. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ углы A и A_1 , а также B и B_1 равны друг другу. Стороны AB и BC равны 8 см и 12 см, A_1B_1 и A_1C_1 — 6 см и 12 см. Найдите стороны AC и B_1C_1 .

852. Стороны одного треугольника равны 80 мм, 48 мм, 64 мм, а периметр подобного ему треугольника — 156 мм. Найдите стороны другого треугольника.

853. Основания CF и DE трапеции $CDEF$ равны соответственно 9 см и 6 см, а боковая сторона CD — 3 см. На сколько нужно продлить боковую сторону CD до ее пересечения с продолжением другой боковой стороны?

854. Прямые, проходящие через боковые стороны PQ и SR трапеции $PQRS$, пересекаются в точке A . Найдите:

- а) меньшее основание QR , учитывая, что большее основание PS равно 50 мм, боковая сторона PQ — 8 мм, а отрезок PA — 20 мм;
 б) отрезок QA , учитывая, что отрезок PA равен 18 см, а основания PS и QR относятся как 6 : 5.

855. Боковые стороны VR и TS трапеции $RSTV$ продлены до пересечения в точке B . Найдите среднюю линию трапеции, учитывая, что $RV = 60$ мм, $RB = 100$ мм, $RS = 120$ мм.

856. Сторона AB треугольника ABC разделена на пять отрезков-долей, и через точки деления параллельно стороне AC проведены прямые, которые пересекают сторону BC . Определите отрезки параллельных прямых, заключенные между сторонами AB и BC , учитывая, что сторона AC равна 250 мм.

857. Две пересекающиеся прямые с общей точкой O одна из параллельных прямых пересекает в точках M и N , другая — в точках P и Q , а через точку O к прямым MN и PQ

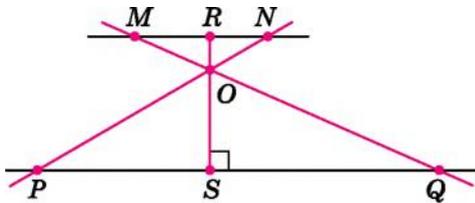


Рис. 383

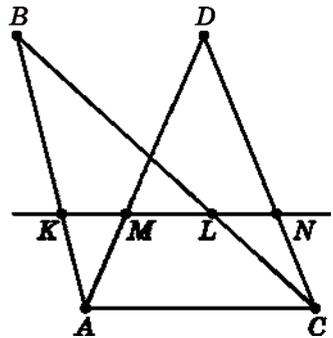


Рис. 384

проведен общий перпендикуляр RS (рис. 383). Стороны OP , OQ , PQ треугольника OPQ оказались равными 48 мм, 36 мм, 60 мм, а высота треугольника OMN — 8 мм. Найдите высоту треугольника OPQ и стороны треугольника OMN .

858. Вершины B и D треугольников ABC и ADC расположены по одну сторону от прямой AC и равноудалены от нее (рис. 384). Докажите, что отрезки каждой прямой, параллельной стороне AC , заключенные между двумя другими сторонами этих треугольников, равны.

859. Основание B_1 высоты BB_1 треугольника ABC отстоит от вершин A и C соответственно на 27 см и 15 см. Найдите части, на которые делится сторона AB длиной 45 см серединным перпендикуляром к стороне AC .

860. У треугольников PQR и $P_1Q_1R_1$ углы P и P_1 равны, а стороны PQ и PR треугольника PQR в 1,6 раза меньше соответствующих сторон P_1Q_1 и P_1R_1 треугольника $P_1Q_1R_1$. Найдите стороны QR и Q_1R_1 , учитывая, что их сумма равна 78 мм.

861. Углы против оснований у двух равнобедренных треугольников равны друг другу. Основание и боковая сторона одного из них равны 12 см и 8 см соответственно. Найдите основание другого треугольника, учитывая, что его боковая сторона равна 12 см.

862. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно. Определите, подобны ли треугольники ABC и ADE , если:

- а) $AB = 24$ мм; $AC = 16$ мм; $AD = 21$ мм; $AE = 14$ мм;
- б) $AB = 28$ дм; $AC = 21$ дм; $AD = 33$ см; $AE = 44$ см;

- в) $AB = 46$ см; $AC = 69$ см; $AD = 22$ мм;
 $AE = 14$ мм;
 г) $AB = 36$ м; $AC = 63$ м; $AD = 91$ мм;
 $AE = 52$ мм.

863. Отрезки AM и CN — биссектрисы равнобедренного треугольника ABC с основанием AC , равным m , и боковыми сторонами, равными n . Найдите расстояние между точками M и N .

864. Найдите подобные треугольники на рисунке 385. Обоснуйте свой выбор.

865. Определите, подобны ли треугольники, если их стороны следующие:

- а) 10 см, 15 см, 20 см; 4 см, 6 см, 8 см;
 б) 1 м, 1,5 м, 2 м; 2 см, 3 см, 4 см;
 в) 10 см, 15 см, 20 см; 2 см, 5 см, 4 см;
 г) 12 дм, 15 дм, 18 дм; 4 см, 6 см, 5 см.

866. Диагонали CE и DF трапеции $CDEF$ с основаниями CF и DE пересекаются в точке A . Найдите отрезки DA и AF , учитывая, что $CE = 36$ мм, $DF = 54$ мм, $AE = 20$ мм.

867. Диагонали RT и SV трапеции $RSTV$ с основаниями RV и ST пересекаются в точке X . Средняя линия этой трапеции равна 290 мм, а отрезки SX и XV относятся как 9 : 20. Найдите основания трапеции и отношение отрезков другой диагонали.

868. Луч, выходящий из вершины D треугольника CDE , пересекает сторону CE в такой точке A , что угол DAE равен углу CDE , а отрезки AC и AE соответственно равны 7 см и 9 см. Найдите сторону DE и отношение сторон DA и DC .

869. Основания трапеции относятся как 13 : 8, а одна из боковых сторон равна 160 мм. На сколько нужно продлить эту сторону, чтобы она пересекла продолжение другой боковой стороны?

870. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрали точку X так, что $BX : XC = 5 : 7$, и через точки D и X провели прямую, которая пересекает прямую AB в точке Y . Найдите отрезок BY , учитывая, что сторона AB равна 70 мм.

871. На продолжении стороны IJ параллелограмма $IJKL$ за точку J выбрали точку B и соединили ее с вершиной L

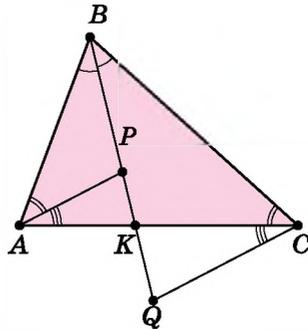


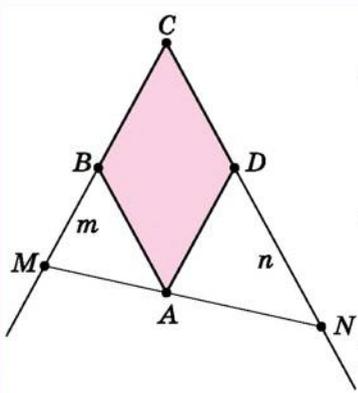
Рис. 385

отрезком, который разделяет диагональ IK на отрезки IA и AK в отношении $a : b$. Найдите отрезок JB , учитывая, что сторона IJ равна c .

872. Параллелограмм вписан в треугольник так, что имеет общий угол с треугольником, стороны параллелограмма относятся как $5 : 6$, а параллельные им стороны треугольника равны соответственно 35 см и 28 см. Найдите стороны параллелограмма.

873. Найдите сторону ромба $ABCD$, учитывая, что прямая, проходящая через вершину A , пересекает лучи CB и CD в таких точках M и N соответственно, что:

- а) $BM = m, DN = n$ (рис. 386);
- б) $CM = b, CN = d$.



Дано: $ABCD$ — ромб;
 $BM = m; DN = n$.
 Найти: AB .

Решение

Пусть $AB = x$. Тогда $BC = CD = DA = x$, так как $ABCD$ — ромб.
 Значит,
 $CM = x + m, CN = x + n$.

$\triangle ABM \sim \triangle NCM$, так как $AB \parallel CD$.
 Поэтому $\frac{BM}{BA} = \frac{CM}{CN}$, или $\frac{m}{x} = \frac{x + m}{x + n}$.

Решим это уравнение:
 $m(x + n) = x(x + m);$
 $mx + mn = x^2 + mx; x^2 = mn; x = \sqrt{mn}.$
 Ответ: \sqrt{mn} .

Рис. 386

874. Через точку M внутри угла A проведите прямую так, чтобы точка M делила пополам отрезок этой прямой, заключенный между сторонами угла.

875. В данный треугольник с основанием a и проведенной к нему высотой h вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании, а две другие вершины — на других сторонах треугольника. Найдите сторону квадрата.

876. В треугольник, основание которого равно 96 мм, а проведенная к нему высота — 32 мм, вписан прямоугольник, большая сторона которого лежит на основании треугольника и относится к меньшей стороне как 9 : 5. Найдите измерения прямоугольника.

877. Решите уравнение:

а) $\frac{a-7}{3-4a} + 1 = \frac{5a+8}{5-2a}$; в) $1 + \frac{4-y}{2y-5} = \frac{1-y}{12-y}$;
 б) $\frac{12-2x}{7-3x} - \frac{x+2}{3-x} = 1$; г) $\frac{3b-7}{b-3} = \frac{2}{b-3} + b$.

878. Докажите, что при всех действительных значениях переменных x и y верно неравенство:

а) $4x^2 - 3xy + 2y^2 \geq 0$; в) $x^2 + \frac{1}{x^2+1} \geq 1$;
 б) $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$; г) $\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$.

879. Зависимости между величинами t и v заданы уравнениями $v = 2t + 5$, $v = \frac{1}{2}t + 2$, $v = -\frac{2}{5}t + 7\frac{2}{5}$. Постройте графики этих зависимостей. Найдите:

- а) координаты точек A , B и C , в которых пересекаются графики функций $v = 2t + 5$ и $v = -\frac{2}{5}t + 7\frac{2}{5}$, $v = \frac{1}{2}t + 2$ и $v = -\frac{2}{5}t + 7\frac{2}{5}$, $v = 2t + 5$ и $v = \frac{1}{2}t + 2$ соответственно;
 б) площадь треугольника ABC ;
 в) длины сторон треугольника ABC ;
 г) высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 треугольника ABC .

880. Найдите точки пересечения графика функции $y = 3x^2 - 7x - 6$:

- а) с осями координат;
 б) с прямыми $x = 4$ и $y = -8$;
 в) с прямыми $x = 5$ и $y = -10$.

881. Маршрутное такси проезжает расстояние в 200 км на 1,5 ч быстрее рейсового автобуса, который движется со скоростью, на 30 км/ч меньшей. Найдите скорость автобуса.

882. Найдите наибольшее семизначное число, которое кратно 72 и записано разными цифрами.

883. На плоскости проведена прямая l и отмечены точки P и Q . Постройте треугольник, одна сторона которого лежит на прямой l , а точки P и Q являются основаниями высот, проведенных к двум другим сторонам.

884. Точку $A(m; n)$ можно соединять отрезками с точками $B(m; n - m)$ и $C(m - n; n)$. Это же можно сделать и с точками B и C и т. д. Можно ли по этим правилам точку X соединить ломаной с точкой Y , если:

- а) $X(20; 7)$ и $Y(2007; 702)$;
 б) $X(231; 990)$ и $Y(1309; 1463)$?

26. Подобные фигуры

Обобщением понятия подобных треугольников является понятие подобных многоугольников.

А. Два многоугольника с одинаковым количеством сторон называются **подобными**, если углы одного многоугольника равны углам другого многоугольника, а соответствующие стороны многоугольников пропорциональны. При этом отношение соответствующих сторон называют **коэффициентом подобия**.

Два подобных многоугольника диагоналями, проведенными из вершин пары соответствующих углов, разделяются на пары соответственно подобных треугольников.

Пусть выпуклые многоугольники $A_1A_2A_3A_4\dots A_{n-1}A_n$ и $B_1B_2B_3B_4\dots B_{n-1}B_n$ подобны (рис. 387) и в них:

$$\begin{aligned} \angle A_1 &= \angle B_1, \angle A_2 = \angle B_2, \angle A_3 = \angle B_3, \dots, \\ \angle A_{n-1} &= \angle B_{n-1}, \angle A_n = \angle B_n; \\ \frac{A_1A_2}{B_1B_2} &= \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \dots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} = \frac{A_nA_1}{B_nB_1} = k. \end{aligned}$$

Проведем все диагонали из вершин A_1 и B_1 , в результате получим $n - 2$ пары соответствующих треугольников $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$, $A_2A_3A_4$ и $B_2B_3B_4$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$ и $B_{n-1}B_nB_1$. Докажем, что треугольники каждой пары подобны.

Треугольники $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ подобны, так как $\angle A_2 = \angle B_2$, а $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}$. Тогда $\angle A_1A_3A_2 = \angle B_1B_3B_2$ и $\frac{A_1A_3}{B_1B_3} = k$. Поэтому

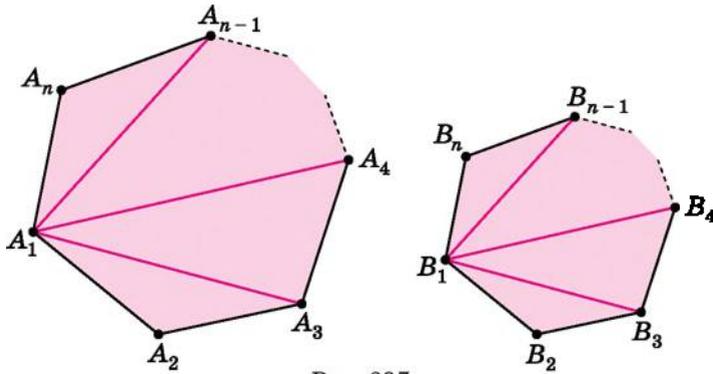


Рис. 387

равны и углы $A_1A_3A_4$ и $B_1B_3B_4$ как разности $\angle A_2A_3A_4 - \angle A_1A_3A_2$ и $\angle B_2B_3B_4 - \angle B_1B_3B_2$ с соответственно равными компонентами. Учитывая, что $\frac{A_1A_3}{B_1B_3} = k = \frac{A_3A_4}{B_3B_4}$, утверждаем, что треугольники $A_1A_3A_4$ и $B_1B_3B_4$ подобны.

Так же устанавливается подобие следующих соответствующих пар.

А если подобные многоугольники $A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$ и $B_1B_2B_3B_4 \dots B_{n-1}B_n$ невыпуклые, то и в этом случае можно доказать подобие треугольников $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$, $A_2A_3A_4$ и $B_2B_3B_4$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$ и $B_{n-1}B_nB_1$.

Теорема 10. *Отношение периметров подобных многоугольников равно коэффициенту подобия.*

Доказательство. Пусть многоугольник $C_1C_2C_3C_4 \dots C_{n-1}C_n$ подобен многоугольнику $D_1D_2D_3D_4 \dots D_{n-1}D_n$ с коэффициентом подобия k (рис. 388). Тогда

$$\frac{C_1C_2}{D_1D_2} = \frac{C_2C_3}{D_2D_3} = \dots = \frac{C_{n-1}C_n}{D_{n-1}D_n} = \frac{C_nC_1}{D_nD_1} = k.$$

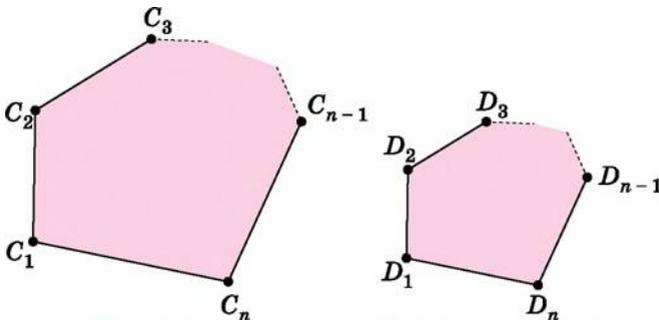


Рис. 388

Отсюда

$$C_1C_2 = kD_1D_2, C_2C_3 = kD_2D_3, \dots, C_{n-1}C_n = kD_{n-1}D_n, C_nC_1 = kD_nD_1.$$

Значит,

$$\frac{C_1C_2 + C_2C_3 + \dots + C_{n-1}C_n + C_nC_1}{D_1D_2 + D_2D_3 + \dots + D_{n-1}D_n + D_nD_1} = \frac{kD_1D_2 + kD_2D_3 + \dots + kD_{n-1}D_n + kD_nD_1}{D_1D_2 + D_2D_3 + \dots + D_{n-1}D_n + D_nD_1} = k, \text{ или } \frac{P}{P_1} = k,$$

где P — периметр многоугольника $C_1C_2C_3C_4\dots C_{n-1}C_n$, P_1 — периметр многоугольника $D_1D_2D_3D_4\dots D_{n-1}D_n$.

Б. Теорема 11. *Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.*

Доказательство. Пусть треугольник EFG подобен треугольнику $E_1F_1G_1$ с коэффициентом подобия k , а FH и F_1H_1 — высоты этих треугольников, проведенные к соответствующим сторонам EG и E_1G_1 (рис. 389). Тогда прямоугольные треугольники EFH и $E_1F_1H_1$ подобны по второму признаку, так как $\angle EFH = \angle E_1F_1H_1$ и $\angle EHF = \angle E_1H_1F_1 = 90^\circ$. Поэтому

$$\frac{FH}{F_1H_1} = \frac{EF}{E_1F_1} = k.$$

Найдем площади S и S_1 треугольников EFG и $E_1F_1G_1$:

$$S = \frac{1}{2} \cdot EG \cdot FH, S_1 = \frac{1}{2} \cdot E_1G_1 \cdot F_1H_1.$$

Теперь найдем отношение площадей, учитывая, что

$$\frac{EG}{E_1G_1} = \frac{EF}{E_1F_1} = k:$$

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot EG \cdot FH}{\frac{1}{2} \cdot E_1G_1 \cdot F_1H_1} = \frac{EG}{E_1G_1} \cdot \frac{FH}{F_1H_1} = k^2.$$

Пусть теперь многоугольник $K_1K_2K_3K_4\dots K_{n-1}K_n$ подобен многоугольнику $L_1L_2L_3L_4\dots L_{n-1}L_n$ с коэффициентом подобия k (рис. 390). Диагоналями, выходящими из вершин K_1 и L_1 , эти многоугольники разделяются на пары $K_1K_2K_3$ и

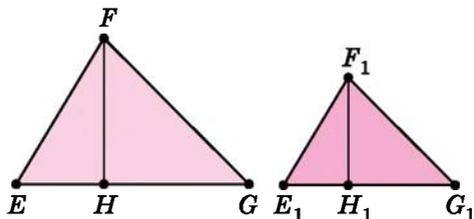


Рис. 389

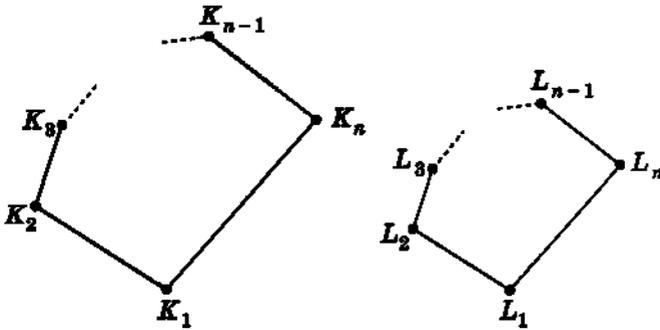


Рис. 390

$L_1L_2L_3$, $K_1K_2K_3$ и $L_1L_2L_3$, ..., $K_{n-1}K_nK_1$ и $L_{n-1}L_nL_1$ подобных треугольников. По уже доказанному

$$\frac{S_{K_1K_2K_3}}{S_{L_1L_2L_3}} = k^2, \quad \frac{S_{K_1K_3K_4}}{S_{L_1L_3L_4}} = k^2, \quad \dots, \quad \frac{S_{K_nK_{n-1}K_1}}{S_{L_nL_{n-1}L_1}} = k^2,$$

или

$$S_{K_1K_2K_3} = k^2 S_{L_1L_2L_3}, \quad S_{K_1K_3K_4} = k^2 S_{L_1L_3L_4}, \quad \dots, \quad S_{K_nK_{n-1}K_1} = k^2 S_{L_nL_{n-1}L_1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{S_{K_1K_2K_3} + S_{K_1K_3K_4} + \dots + S_{K_nK_{n-1}K_1}}{S_{L_1L_2L_3} + S_{L_1L_3L_4} + \dots + S_{L_nL_{n-1}L_1}} = \\ & = \frac{k^2 S_{L_1L_2L_3} + k^2 S_{L_1L_3L_4} + \dots + k^2 S_{L_nL_{n-1}L_1}}{S_{L_1L_2L_3} + S_{L_1L_3L_4} + \dots + S_{L_nL_{n-1}L_1}} = k^2. \end{aligned}$$

Поскольку суммы $S_{K_1K_2K_3} + S_{K_1K_3K_4} + \dots + S_{K_nK_{n-1}K_1}$ и $S_{L_1L_2L_3} + S_{L_1L_3L_4} + \dots + S_{L_nL_{n-1}L_1}$ дают площади S и S_1 многоугольников $K_1K_2K_3K_4\dots K_{n-1}K_n$ и $L_1L_2L_3L_4\dots L_{n-1}L_n$, то $\frac{S}{S_1} = k^2$.

Зададим теперь вопрос о том, как целесообразно определить подобие любых фигур, а не только многоугольников.

Обратим внимание на то, что если многоугольники $A_1A_2A_3A_4\dots A_{n-1}A_n$ и $B_1B_2B_3B_4\dots B_{n-1}B_n$ подобны, то между их точками можно установить такое соответствие, при котором каждой точке M многоугольника $A_1A_2A_3A_4\dots A_{n-1}A_n$ соответствует единственная точка N многоугольника $B_1B_2B_3B_4\dots B_{n-1}B_n$, и наоборот, если при этом точкам X и Y многоугольника

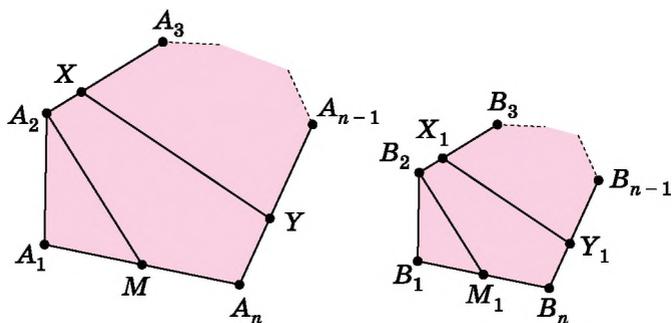


Рис. 391

$A_1A_2A_3A_4\dots A_{n-1}A_n$ соответствуют точки X_1 и Y_1 многоугольника $B_1B_2B_3B_4\dots B_{n-1}B_n$, то $\frac{XY}{X_1Y_1} = k$ (рис. 391).

Можно доказать, что верно и обратное утверждение: если между точками двух многоугольников можно установить такое соответствие, при котором каждой точке M первого многоугольника соответствует единственная точка второго многоугольника, и наоборот, и при этом отношение расстояний между парами соответствующих точек постоянно, то эти многоугольники являются подобными.

Отмеченное обстоятельство дает основание для следующего определения.

Фигура Φ называется подобной фигуре Φ_1 с коэффициентом подобия k , если между точками фигур Φ и Φ_1 можно установить соответствие, при котором каждой точке A фигуры Φ соответствует единственная точка A_1 фигуры Φ_1 , и наоборот, при этом если точкам X и Y фигуры Φ соответствуют точки X_1 и Y_1 фигуры Φ_1 , то всегда $\frac{XY}{X_1Y_1} = k$ (рис. 392).

Это определение распространяется и на геометрические тела.

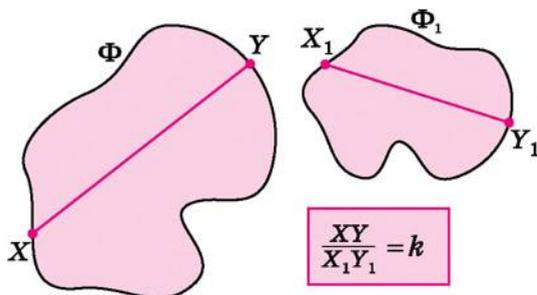


Рис. 392

Мы доказали, что отношение периметров подобных многоугольников равно коэффициенту подобия k , а отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату k^2 коэффициента подобия. Аналогичное утверждение верно и для произвольных подобных фигур, а также для объемов подобных фигур.

Отношение объемов подобных фигур-тел равно кубу коэффициента подобия.

- ?
1. Какие многоугольники называются подобными?
 2. Сформулируйте теорему об отношении периметров подобных многоугольников.
 3. Сформулируйте теорему об отношении площадей подобных многоугольников.
 4. Какие фигуры называются подобными?
 5. Сформулируйте свойство периметров подобных фигур; площадей подобных фигур.

885. Подобны ли любые:

- а) два равносторонних треугольника;
- б) два прямоугольника;
- в) два ромба;
- г) два квадрата;
- д) две окружности;
- е) два круга?

886. Докажите, что:

- а) если треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, а треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику $A_2B_2C_2$, то треугольник ABC подобен треугольнику $A_2B_2C_2$;
- б) если треугольники ABC и DEF подобны треугольнику PQR , то они подобны друг другу;
- в) если треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия k , то треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{1}{k}$.

887. Стороны одного пятиугольника равны 42 мм, 28 мм, 49 мм, 35 мм, 14 мм, а большая сторона подобного ему другого пятиугольника равна 35 мм. Найдите остальные стороны другого пятиугольника.

888. Стороны одного четырехугольника относятся как $3 : 5 : 7 : 11$, а суммарная длина наибольшей и наименьшей сторон другого четырехугольника, подобного первому, равна 56 дм. Найдите стороны другого четырехугольника.

889. Наибольшие стороны двух подобных многоугольников равны 70 мм и 175 мм, а разность периметров составляет 300 мм. Найдите периметры этих многоугольников.

890. Серединный перпендикуляр к стороне прямоугольника разделяет его на части, подобные этому прямоугольнику. Найдите отношение сторон данного прямоугольника и прямоугольника-части.

891. Укажите достаточные условия для того, чтобы были подобными:

- а) прямоугольники;
- б) ромбы;
- в) параллелограммы;
- г) трапеции;
- д) прямоугольные трапеции;
- е) равнобедренные трапеции.

892. Приведя соответствующие рисунки, докажите, что для подобия четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ недостаточно выполнения условия:

- а) $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$;
- б) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DA}{D_1A_1}$.

893. Учитывая, что закрашенный контур имеет одну и ту же ширину, скажите, будут ли подобными фигуры, которые являются внешним и внутренним контурами фигуры на рисунке:

- а) 393; б) 394; в) 395; г) 396; д) 397.

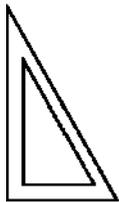


Рис. 393

Рис. 394



Рис. 395

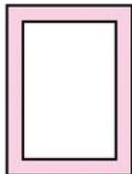
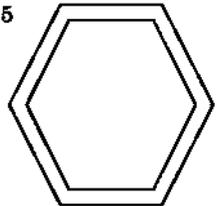


Рис. 396



Рис. 397

894. Во сколько раз площадь квадрата $ABCD$ больше площади квадрата $A_1B_1C_1D_1$, если:

- а) $AB : A_1B_1 = 2 : 1$; г) $A_1B_1 : AB = 1 : 4$;
б) $CD : C_1D_1 = 5 : 3$; д) $A_1C_1 : AC = 5 : 11$;
в) $AD : A_1D_1 = 5 : 4$; е) $B_1D_1 : BD = 1 : 3$?

895. Найдите отношение площадей подобных многоугольников, если коэффициент подобия равен:

- а) 3; б) $\frac{1}{3}$; в) 2,5; г) 0,4; д) $\frac{3}{7}$; е) $2\frac{1}{3}$.

896. Найдите отношение соответствующих сторон подобных многоугольников, если площадь первого многоугольника относится к площади второго как:

- а) 4 : 1; в) 9 : 25; д) 121 : 625;
б) 1 : 16; г) 100 : 49; е) 81 : 361.

897. Запишите отношение площадей:

- а) квадратов, стороны которых относятся как 3 : 5;
б) равносторонних треугольников, стороны которых относятся как 5 : 7.

898. На стороне равностороннего треугольника PQR построили квадрат $PRTS$ (рис. 398 и 399). Найдите отношение площади треугольника PQR к площади:

- а) квадрата $PRTS$;
б) пятиугольника $PQRTS$.

899. Площади квадратов относятся как 5 : 7, а сторона меньшего квадрата равна 10 м. Найдите с точностью до сотой сторону большего квадрата.

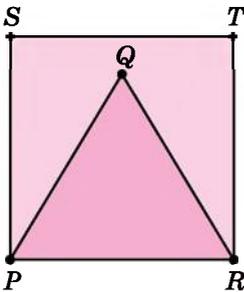


Рис. 398

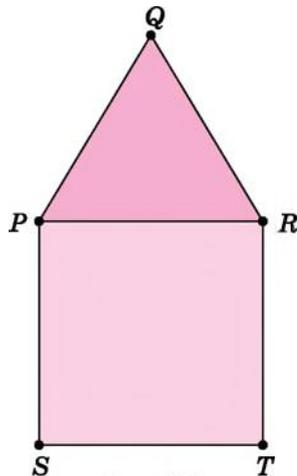


Рис. 399

900. Найдите, какую часть от площади данного треугольника составляет площадь треугольника:

- а) отсеченного от него средней линией;
- б) ограниченного его средними линиями.

901. Площадь данного многоугольника равна 54 дм^2 . Найдите площадь подобного ему многоугольника, если соответствующие стороны многоугольников равны 8 см и 12 см .

902. Прямая, проходящая через вершину C параллелограмма $ABCD$, пересекает лучи AB и AD в точках M и N соответственно. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, учитывая, что площадь треугольника BCN равна Q и $AD : DN = a : b$.

903. Треугольник двумя прямыми, параллельными одной стороне, разделен на три равновеликие части. Определите, в каком отношении разделились две другие стороны.

904. Катеты прямоугольного треугольника относятся как $3 : 4$, а высота делит его площадь на части, разность которых равна 840 дм^2 . Найдите площадь данного треугольника.

905. Найдите отношение объемов подобных прямоугольных параллелепипедов, если коэффициент подобия равен:

- а) 3 ;
- б) $\frac{1}{3}$;
- в) $2,5$;
- г) $0,4$;
- д) $\frac{3}{7}$;
- е) $2\frac{1}{3}$.

906. Сократите, если возможно, рациональную дробь:

- а) $\frac{a^2 - 18a + 65}{a^2 - 16a + 39}$;
- б) $\frac{2b^2 - 18b + 28}{3b^2 - 3b - 6}$;
- в) $\frac{2c^2 + 12c - 14}{3c^2 + 27c - 30}$;
- г) $\frac{135 - 12d - 3d^2}{2d^2 - 24d + 70}$.

907. На одной координатной плоскости постройте графики функций $y = \frac{2}{x}$ и $y = \frac{2}{x} - 2$. Какую гипотезу вы можете выдвинуть?

908. Площадь первого прямоугольника равна 45 м^2 , второго — 36 м^2 . Найдите измерения каждого прямоугольника, учитывая, что из меньших измерений прямоугольников большее на 2 м у первого прямоугольника, а из больших — на 3 м у второго.

909. На первую половину пути поезд затратил на 20 мин больше, чем на вторую, а скорость на второй половине была

на 10 км/ч больше. Найдите скорость поезда на первой половине, учитывая, что весь путь составляет 280 км.

910. Числитель дроби на 3 меньше знаменателя. Если числитель увеличить на 5, а знаменатель на 4 уменьшить, то дробь увеличится в 4 раза. Найдите исходную дробь.

* * *

911. На доске выписали подряд все числа от 1 до 10 000, а потом вытерли кратные 2, 3 или 5. Какое число находится теперь на 2015-м месте?

912. Докажите, что не существует такого натурального числа n , чтобы произведение $73 \cdot n$ записывалось как $3n7$.

913. Викторина состоит из простых и сложных вопросов. За правильный ответ на простой вопрос начисляется 2 очка, а за правильный ответ на сложный вопрос — 3 очка. Если на простой вопрос не дан правильный ответ, то с участника списывается 1 очко. Определите, сколько простых вопросов было задано, учитывая, что один из участников правильно ответил на 10 вопросов и набрал 16 очков.

27. Свойства прямоугольного треугольника

В параграфе 13 учебного пособия для 7-го класса мы уже обсуждали свойства и признаки прямоугольного треугольника. Вы знаете, что *если треугольник является прямоугольным, то:*

- *квадрат его гипотенузы равен сумме квадратов катетов (теорема Пифагора);*
- *его острые углы вместе составляют 90° ;*
- *медiana, проведенная к гипотенузе, равна ее половине;*
- *если катет лежит против угла в 30° , то он равен половине гипотенузы;*
- *если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла в 30° .*

Вы знаете также, что *треугольник является прямоугольным, если:*

- *сумма двух углов треугольника равна 90° ;*
- *одна из медиан треугольника равна половине стороны, к которой проведена;*
- *квадрат большей стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон.*

А. Прямоугольный треугольник имеет ряд других интересных свойств. Рассмотрим некоторые из них.

Сначала введем одно понятие. Вы знаете, что **средним арифметическим** \bar{a} двух чисел a_1 и a_2 называется полусумма этих чисел:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Средним геометрическим, или **средним пропорциональным**, g двух неотрицательных чисел a_1 и a_2 называется квадратный корень из произведения этих чисел:

$$g = \sqrt{a_1 a_2}.$$

Теорема 12. *Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, является средним геометрическим отрезков, на которые она разделяет гипотенузу.*

Доказательство. Пусть BB_1 — высота прямоугольного треугольника ABC , проведенная к гипотенузе AC (рис. 400).

Докажем, что

$$BB_1 = \sqrt{AB_1 \cdot CB_1}.$$

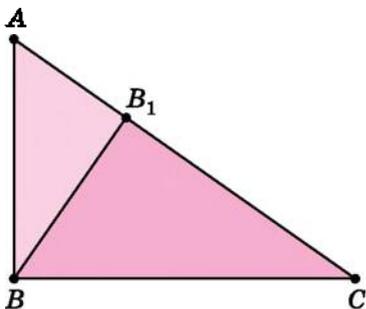


Рис. 400

Каждый из треугольников ABB_1 и CBB_1 подобен данному треугольнику ABC , так как, кроме равных прямых углов, треугольники ABB_1 и ABC имеют общий острый угол A , а треугольники CBB_1 и ABC — общий острый угол C . Поэтому треугольники

ABB_1 и CBB_1 подобны друг другу. Это позволяет записать пропорцию $\frac{AB_1}{BB_1} = \frac{BB_1}{CB_1}$, из которой получаем $BB_1^2 = AB_1 \cdot CB_1$, или

$$BB_1 = \sqrt{AB_1 \cdot CB_1}.$$

Теорема 13. *Катет прямоугольного треугольника является средним геометрическим гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.*

Доказательство. Пусть BB_1 — высота прямоугольного треугольника ABC , проведенная к гипотенузе AC (см. рис. 400).

Докажем, что $AB = \sqrt{AC \cdot AB_1}$, а $BC = \sqrt{AC \cdot CB_1}$.

Поскольку треугольник ABB_1 подобен треугольнику ACB , то $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AB}$. Поэтому $AB^2 = AC \cdot AB_1$, или

$$AB = \sqrt{AC \cdot AB_1}.$$

Также из подобия треугольников CBB_1 и CAB следует пропорция $\frac{BC}{CB_1} = \frac{AC}{BC}$. Значит, $BC^2 = AC \cdot CB_1$, или

$$BC = \sqrt{AC \cdot CB_1}.$$

Б. Теорема 13 позволяет получить еще одно доказательство теоремы Пифагора. Пусть BB_1 — высота прямоугольного треугольника ABC , проведенная к гипотенузе AC (см. рис. 400). Тогда

$$AB^2 = AC \cdot AB_1, \text{ а } BC^2 = AC \cdot CB_1.$$

Сложив покомпонентно эти равенства, получим:

$$AB^2 + BC^2 = AC \cdot AB_1 + AC \cdot CB_1,$$

или

$$AB^2 + BC^2 = AC \cdot (AB_1 + CB_1).$$

Наконец, учитывая, что $AB_1 + CB_1 = AC$, можем записать:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2.$$

Задача. Найдем длину отрезка AB на координатной плоскости, концы которого заданы своими координатами: $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ (рис. 401).

Через точку A проведем прямую, параллельную оси ординат, а через точку B — прямую, параллельную оси абсцисс. Пусть они пересекаются в точке C . Поскольку треугольник ABC прямоугольный, то

$$AB^2 = CA^2 + CB^2.$$

Но

$$CA = |y_2 - y_1|, \quad CB = |x_2 - x_1|,$$

поэтому

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

или

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Длина отрезка равна квадратному корню из суммы квад-

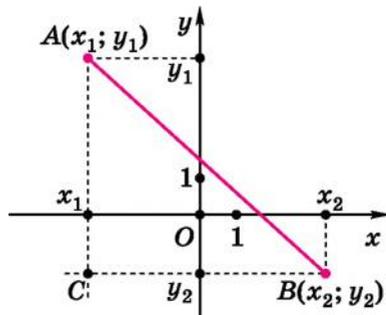


Рис. 401

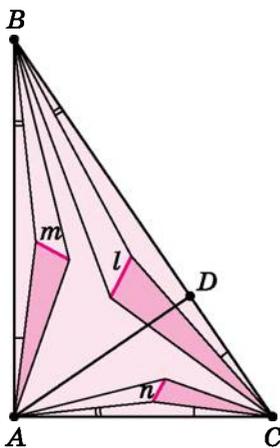


Рис. 402

в прямоугольных треугольниках ABC , ADB , ADC (рис. 402).

Треугольники ABC , ADB , ADC подобны друг другу. Поэтому $\frac{l}{m} = \frac{AC}{AB}$ и $\frac{l}{n} = \frac{AC}{BC}$, а, значит, $\frac{l}{BC} = \frac{m}{AB} = \frac{n}{AC}$.

Пусть значение каждой из дробей $\frac{l}{BC}$, $\frac{m}{AB}$ и $\frac{n}{AC}$ равно α . Тогда

$$l = \alpha BC, \quad m = \alpha AB, \quad n = \alpha AC.$$

Умножив равенство $BC^2 = AB^2 + AC^2$, которое истинно в соответствии с теоремой Пифагора, на α^2 , получим:

$$\alpha^2 BC^2 = \alpha^2 AB^2 + \alpha^2 AC^2.$$

Но $\alpha^2 BC^2 = l^2$, $\alpha^2 AB^2 = m^2$, $\alpha^2 AC^2 = n^2$. Поэтому

$$l^2 = m^2 + n^2. \blacktriangle$$

Задача. В прямоугольном треугольнике проведен перпендикуляр к гипотенузе. Найдём расстояние между точками пересечения медиан и биссектрис в этом треугольнике, если известно, что такие расстояния в образовавшихся треугольных его частях равны 3 см и 4 см.

Отрезки, соединяющие точки пересечения медиан с точками пересечения биссектрис в каждом из трех треугольников, являются соответствующими. Поэтому их длины x см, 3 см и 4 см связаны обобщенной теоремой Пифагора: $x^2 = 3^2 + 4^2$. Значит, $x = 5$ см.



1. Какое свойство имеют острые углы прямоугольного треугольника?
2. Какое свойство имеет катет прямоугольного треугольника, лежащий против острого угла в 30° ?

3. Какое свойство имеет угол прямоугольного треугольника, который лежит против катета, равного половине гипотенузы?
4. Каким равенством связаны гипотенуза и катеты прямоугольного треугольника?
5. Какое число называют средним арифметическим двух чисел?
6. Какое число называют средним геометрическим, или средним пропорциональным, двух неотрицательных чисел?
7. Какое свойство имеет высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе?
8. Какое свойство имеет катет прямоугольного треугольника?
9. Сформулируйте известные вам признаки прямоугольного треугольника.

914. Найдите среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел:

- а) 2 и 8; в) 63 и 7; д) 15 и 19; ж) $\frac{5}{6}$ и 1,2;
 б) 6 и 24; г) 21 и 84; е) 16 и 48; з) $1\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$.

915. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, учитывая, что его катеты равны:

- а) 8 см и 15 см; в) 16 дм и 63 дм; д) 11 и 17;
 б) 12 м и 35 м; г) 5 и 7; е) $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$.

916. Найдите катет прямоугольного треугольника, учитывая, что его другой катет и гипотенуза соответственно равны:

- а) 12 см и 13 см; в) 9 дм и 41 дм; д) 7 и 18;
 б) 7 м и 25 м; г) $4\sqrt{10}$ и $4\sqrt{6}$; е) 13 и 17.

917. Найдите длину отрезка RS , учитывая, что:

- а) $R(7; -3); S(10; 1);$ г) $R(5; 13); S(17; 40);$
 б) $R(-5; -12); S(6; 48);$ д) $R(-1; 3); S(3; -1);$
 в) $R(-5; -2); S(0; 10);$ е) $R(9; 10); S(-3; 10).$

918. Найдите высоту h , проведенную из вершины C прямоугольного треугольника ABC , и отрезки c_1 и c_2 , на которые основание D высоты разделяет гипотенузу (рис. 403), учитывая, что катеты a и b равны соответственно:

- а) 15 и 20; б) 8 и 15; в) 7 и 24; г) 21 и 72.

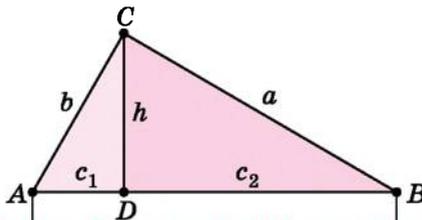


Рис. 403

919. Найдите высоту h , проведенную из вершины C прямоугольного треугольника ABC , и отрезки c_1 и c_2 , на которые основание D высоты разделяет гипотенузу (см. рис. 403), учитывая, что катет a и гипотенуза c соответственно равны:
 а) 6 и 10; б) 9 и 41; в) 55 и 73; г) 11 и 61.

920. С учетом обозначений, приведенных на рисунке 403, найдите значения отсутствующих в таблице величин.

	a	b	c	c_1	c_2	h
а)	5	10				
б)	9		15			
в)		21	29			
г)	3			1,8		
д)	5				$1\frac{12}{13}$	
е)	6					4,8
ж)		75			80	
з)		$\sqrt{6}$		2		
и)		$3\frac{1}{3}$				2
к)			20	2		
л)			169		25	
м)			25			6,72
н)				64	225	
о)				$39\frac{1}{41}$		$8\frac{32}{41}$
п)					$13\frac{23}{29}$	$14\frac{14}{29}$
р)		40			$39\frac{1}{41}$	

921. Докажите, что если катеты прямоугольного треугольника равны a и b , гипотенуза — c , высота, проведенная к гипотенузе, — h , то истинно равенство $ab = ch$.

922. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 5 : 7, а гипотенуза равна 222 мм. Найдите отрезки гипотенузы,

на которые она разделяется высотой треугольника, проведенной из вершины прямого угла.

923. Катеты прямоугольного треугольника относятся как $3 : 4$, а из отрезков гипотенузы, на которые она разделяется высотой треугольника, проведенной из вершины прямого угла, один меньше другого на 70 мм. Найдите стороны треугольника.

924. Катеты прямоугольного треугольника относятся как $8 : 15$. Определите отрезки гипотенузы, на которые она разделяется высотой треугольника, проведенной из вершины прямого угла, учитывая, что эта высота равна 204 см.

925. Докажите, что отношение квадратов катетов прямоугольного треугольника равно отношению их проекций на гипотенузу.

926. Найдите тройки (a, b, c) последовательных натуральных чисел, которые выражают стороны прямоугольного треугольника.

927. Найдите расстояние от точки внутри прямого угла до его вершины, учитывая, что она удалена от сторон угла на:

а) 12 см и 35 см; б) a и b .

928. Найдите диагональ прямоугольника, измерения которого равны 60 мм и 91 мм.

929. Найдите радиус окружности, которой принадлежат все вершины прямоугольника (рис. 404) со сторонами a и b .

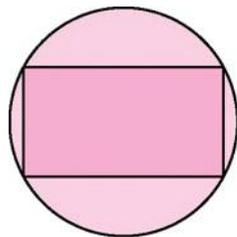


Рис. 404

930. Вершины прямоугольника принадлежат окружности с радиусом 50 мм. Найдите стороны прямоугольника, учитывая, что они относятся как $7 : 24$.

931. Катеты прямоугольного треугольника равны 14 и 48 . Найдите радиус окружности, проходящей через вершины треугольника.

932. Катеты прямоугольного треугольника равны 16 и 30 . Найдите его медиану, проведенную к гипотенузе.

933. Катеты прямоугольного треугольника равны 20 и 48 . Найдите его медианы.

934. Высоты треугольников, на которые разделяет данный прямоугольный треугольник высота, проведенная из вершины прямого угла, равны 8 и 15. Найдите:

- а) высоту данного треугольника;
- б) стороны данного треугольника.

935. Биссектрисы меньших углов треугольников, на которые разделяет данный прямоугольный треугольник высота, проведенные из вершины прямого угла, равны 1 и 2. Найдите:

- а) биссектрису меньшего угла данного треугольника;
- б) стороны данного треугольника.

936. Точки P , Q , R и S выбраны в одной плоскости так, что $PQ = QR = 25$, $PS = RS = 39$, $PR = 30$. Найдите отрезок QS .

937. Точки A , B , C и D выбраны так, что $AB = BC = CD = 5$, $AD = \sqrt{5}$, $AC = 2\sqrt{5}$, $BD = 5\sqrt{2}$. Докажите, что точки A , B , C и D лежат в одной плоскости.

938. Отношение меньшего катета прямоугольного треугольника ABC к его гипотенузе равно 0,5. Найдите отношение большего катета к меньшему в треугольнике $A_1B_1C_1$, подобном треугольнику ABC .

939. Отношение катетов NM и NQ прямоугольного треугольника NMQ равно 2. Треугольник $N_1M_1Q_1$ с прямым углом N_1 подобен треугольнику NMQ . Найдите отношение:

- а) $\frac{N_1M_1}{N_1Q_1}$;
- б) $\frac{N_1M_1}{M_1Q_1}$;
- в) $\frac{N_1Q_1}{N_1M_1}$;
- г) $\frac{N_1Q_1}{Q_1M_1}$;
- д) $\frac{M_1Q_1}{N_1M_1}$;
- е) $\frac{M_1Q_1}{N_1Q_1}$.

940. Решите уравнение:

- а) $\sqrt{2x - 1} = 3$;
- б) $\sqrt{3 - 2x} = 3$;
- в) $\sqrt{3x + 1} = 5$;
- г) $\sqrt{-3 - 2x} = 5$.

941. Напишите уравнение прямой, изображенной на рисунке 405. Составьте таблицу значений соответствующей функции на промежутке $[-6; 6]$ с шагом 1,5.

942. Постройте график функции:

- а) $y = x^2$;
- б) $y = x^2 - 1$;
- в) $y = (x - 1)^2$;
- г) $y = -2(x - 1)^2$.

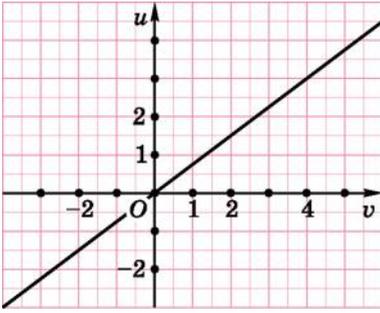


Рис. 405

943. Напишите уравнение квадратной функции, представленной на рисунке 406. Составьте таблицу ее значений на промежутке $[-2; 4]$ с шагом 0,5.

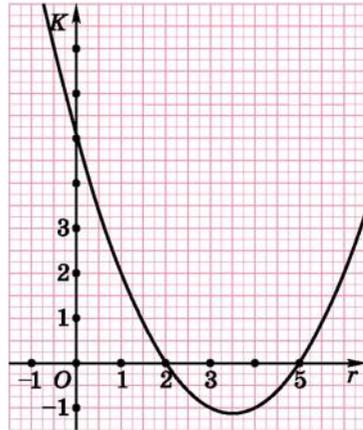


Рис. 406

944. Потери энергии Q в джоулях в электрической цепи находятся по формуле $Q = I^2 R t$, где I — сила тока в амперах, R — сопротивление цепи в омах, t — время в секундах. Когда сила тока в цепи возросла на 10 А, то потери энергии увеличились в два раза. Определите первоначальную силу тока.

945. Отношение площадей двух кругов равно 2. Найдите радиусы кругов, учитывая, что они отличаются на 6 см.

* * *

946. Запишите уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

947. Докажите, что при любом целом значении переменной n значение выражения $n^6 - n^2$ кратно 60.

948. Докажите, что если сумма трех простых чисел больше 3 кратна 3, то все попарные разности этих чисел кратны шести.

28. Синус и косинус углов от 0° до 180°

Мы знаем, что каждому острому углу α соответствует определенное значение отношения $\frac{MX}{MA}$ (рис. 407), т. е. синуса острого угла α :

$$\sin \alpha = \frac{MX}{MA}. \quad (1)$$

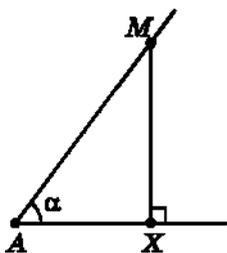


Рис. 407

Если здесь рассматривать MX как расстояние от точки X на одной стороне угла до прямой, содержащей другую его сторону (рис. 407), то формулу (1) можно принять за определение синуса для углов от 0° до 180° . Именно синус угла можно определить как отношение, первый компонент которого есть расстояние от произвольной точки M на одной стороне угла до прямой, содержащей другую его сторону, а второй компонент — расстояние от точки M до вершины угла (рис. 408).

При таком определении *синус тупого угла α равен синусу смежного с ним острого угла.*

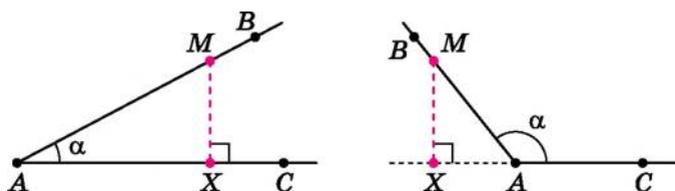


Рис. 408

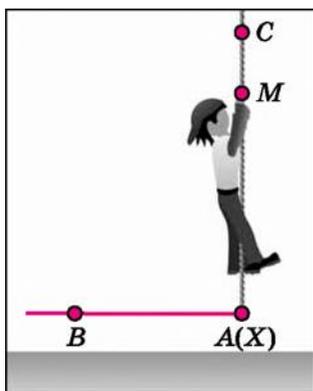


Рис. 409

Если угол α является прямым (рис. 409), то $MX = AM$, и поэтому *синус прямого угла равен 1.*

Если угол α равен 0° или 180° , то перпендикуляр MX превращается в точку, значит, $MX = 0$. Поэтому

$$\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = \frac{MX}{MA} = 0.$$

Поскольку синусы смежных углов равны, то для любого острого угла α верно равенство

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

Это равенство позволяет найти синусы некоторых тупых углов:

$$\sin 120^\circ = \sin (180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin 135^\circ = \sin (180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin 150^\circ = \sin (180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Правообладатель Народная асвета

Результаты вычислений сведем в таблицу.

Угол α , °	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Синус угла α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Теперь можно обосновать некоторые свойства синуса.

Синус любого угла не больше единицы: $\sin \alpha \leq 1$.

Это следует из того, что длина перпендикуляра к прямой не больше длины другого отрезка от той же точки до любой точки прямой.

Если угол возрастает от 0° до 90° , то синус возрастает от 0 до 1.

Действительно, пусть AOB — острый угол величиной α (рис. 410). На одной из его сторон, например OB , выберем точку M на расстоянии 1 от вершины O . Из точки M опустим перпендикуляр MX на другую сторону OA . Тогда длина этого перпендикуляра есть $\sin \alpha$.

При возрастании угла α от 0° до 90° отрезок OA поворачивается вокруг точки O от положения OM_1 на луче OA до положения OM_2 на луче OB (рис. 411). При этом точка M прописывает четверть окружности, а длина отрезка MX , это значит $\sin \alpha$, возрастает от 0 до 1.

Если угол возрастает от 90° до 180° , то синус убывает от 1 до 0.

Действительно, если тупой угол возрастает от 90° до 180° , то смежный с ним угол убывает от 90° до 0° , а это по предыдущему свойству означает, что синус такого угла убывает от 1 до 0.

Наглядно изменение синуса тупого угла при возрастании угла от 90° до 180° можно проследить по рисунку 412.

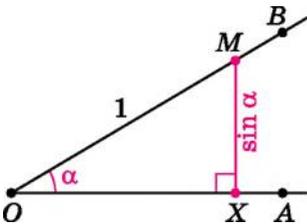


Рис. 410

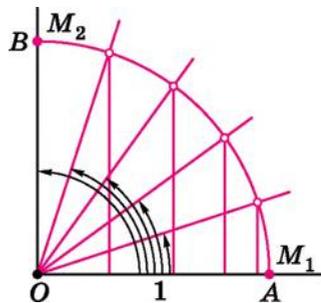


Рис. 411

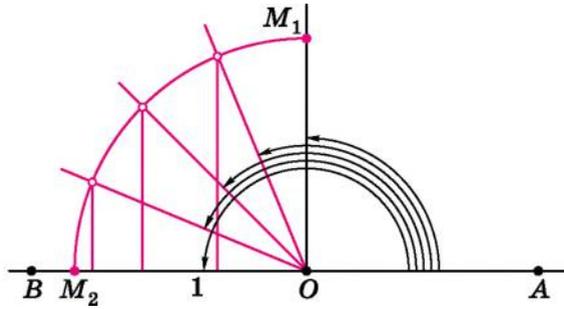


Рис. 412

Величина острого угла определяется его синусом, это означает, что по синусу острого угла можно найти сам угол.

Величина тупого угла также определяется его синусом. А если известен только синус угла и неизвестно, какой это угол — острый или тупой, то величина угла не определяется однозначно. Например, если известно, что $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то сам угол α равен или 45° , или 135° .

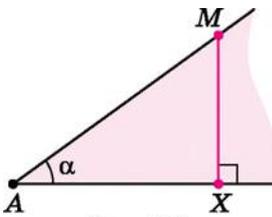


Рис. 413

Б. Напомним, что каждому острому углу α соответствует определенное значение отношения $\frac{AX}{AM}$ (рис. 413), т. е. косинус острого угла α :

$$\cos \alpha = \frac{AX}{AM}. \quad (2)$$



Рис. 414

Понятию косинуса можно дать такое практическое объяснение. Проследим за движением маятника метронома (рис. 414), который колеблется, отклоняясь от вертикали то в одну, то в другую сторону. На рисунке 415 стрелкой AM условно показан маятник метронома, через неподвижную точку A которого проведена горизонтальная прямая x . Каждому отклонению маятника AM от вертикали соответствует определенная его проекция AX на прямую x (рис. 416). Вместе с этим длина отрезка AX не определяет однозначно положение

ния маятника. Например, положения маятника, показанные на рисунках 417 и 418, различны, хотя проекции их на прямую x равны. Однако если прямую x сделать координатной прямой, то точки X_1 и X_2 получат различные координаты, которые уже однозначно определяют положения маятника. Это позволяет следующим образом определить косинус для всех углов из промежутка $[0^\circ; 180^\circ]$:

$$\cos \alpha = \begin{cases} \frac{AX}{AM}, & \text{если угол } \alpha \text{ не больше прямого (рис. 419 и 420);} \\ -\frac{AX}{AM}, & \text{если угол } \alpha \text{ тупой или развернутый (рис. 421 и 422).} \end{cases}$$

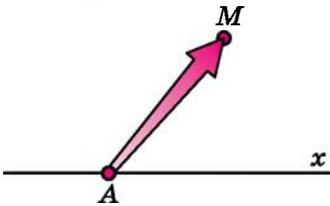


Рис. 415

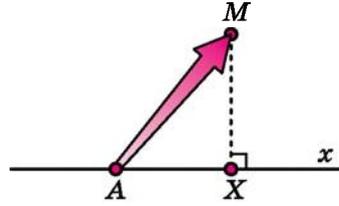


Рис. 416

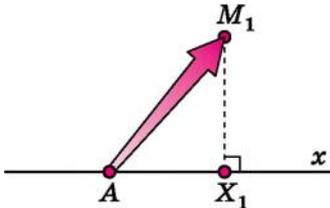


Рис. 417

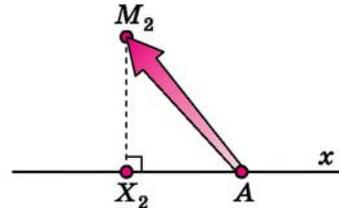


Рис. 418

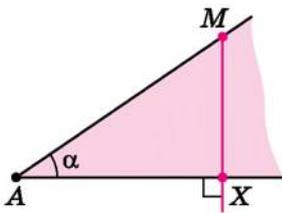


Рис. 419

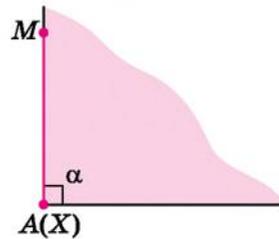


Рис. 420

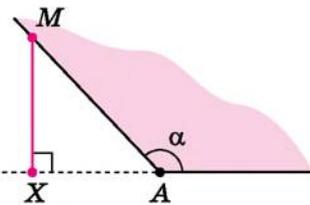


Рис. 421

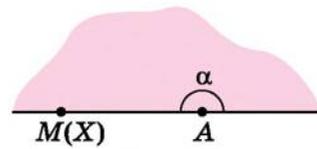


Рис. 422

Если $\alpha = 0^\circ$, то $AH = AM$, поэтому $\cos 0^\circ = 1$.

Если угол α прямой, то $AH = 0$, поэтому $\cos 90^\circ = 0$.

Если угол α развернутый, то $AH = -AM$, поэтому $\cos 180^\circ =$
 $= -\frac{AH}{AM} = -\frac{AM}{AM} = -1$.

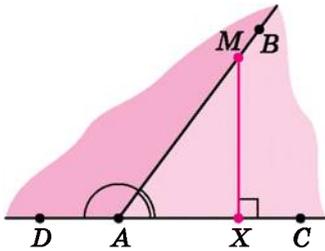


Рис. 423

Обоснуем некоторые свойства косинуса.

Если углы смежные, то их косинусы противоположные. Пусть угол DAB смежный с углом CAB (рис. 423). Из произвольной точки M общей стороны AB этих углов опустим перпендикуляр MX на другую сторону острого угла CAB . Тогда по определению косинуса можем записать:

$$\cos CAB = \frac{AX}{AM}; \quad \cos DAB = -\frac{AX}{AM}.$$

Утверждение истинно и для прямых углов, так как их косинусы равны нулю.

Значит,

$$\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

Найдем косинусы некоторых углов.

Имеем:

$$\cos 30^\circ = \sin (90^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 45^\circ = \sin (90^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 60^\circ = \sin (90^\circ - 60^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\cos 120^\circ = \cos (180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\cos 135^\circ = \cos (180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 150^\circ = \cos (180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Результаты вычислений сведем в таблицу.

Угол $\alpha, ^\circ$	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Косинус угла α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

В. Формула $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ верна для любых углов α от 0° до 180° .

Эта формула доказана для острых углов. Пусть теперь угол α — тупой и β — смежный с ним угол. Тогда $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$, $\cos \alpha = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta$ и $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (\sin \beta)^2 + (-\cos \beta)^2 = \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$.

Если $\alpha = 90^\circ$, то $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$. Значит,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1^2 + 0^2 = 1.$$

Если $\alpha = 0^\circ$, то $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$. Значит,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 0^2 + 1^2 = 1.$$

Если $\alpha = 180^\circ$, то $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$. Значит,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 0^2 + (-1)^2 = 1.$$

Косинус любого угла не меньше -1 и не больше 1 :

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

Если угол возрастает от 0° до 180° , то косинус убывает от 1 до -1 .

Докажем это. Пусть AOB — угол величиной α (рис. 424 и 425). На одной из его сторон, например OB , выберем точку M , отстоящую от вершины O на 1 . Из точки M опустим перпендикуляр MX на другую сторону OA . На прямой OA зададим систему координат с началом O и единичным отрезком, равным OM . Пусть точки R и S имеют соответственно координаты 1 и -1 . Тогда координата точки X есть $\cos \alpha$.

При возрастании угла α от 0° до 180° отрезок OM поворачивается вокруг точки O от положения OR на луче OA до положения OS . При этом точка M прорисовывает полуокружность, а точка X пробегает отрезок RS от точки R до точки S . Это означает, что координата x точки X , иначе $\cos \alpha$, убывает от 1 до -1 .

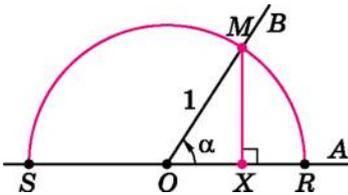


Рис. 424

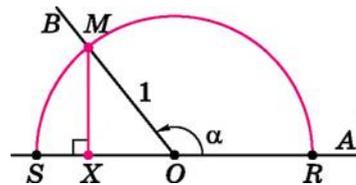


Рис. 425

Величина угла определяется его косинусом, т. е. по косинусу угла можно найти сам угол.

Например, если известно, что $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то сам угол α равен 45° , а если $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то сам угол α равен 135° .

- ?** 1. Отношение каких расстояний называют синусом угла?
2. Как определяется синус тупого угла?
3. Как определяется синус прямого угла; развернутого угла; нулевого угла?
4. Какой смысл имеет синус острого угла прямоугольного треугольника?
5. Чему равен синус 30° ; 45° ; 60° ; 90° ; 120° ; 135° ; 150° ; 180° ?
6. Сформулируйте свойства синуса.
7. Как определяется косинус угла, не большего 90° ?
8. Как связаны косинусы смежных углов?
9. Какой зависимостью связаны синус и косинус одного угла?
10. Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством?
11. Чему равен косинус 0° ; 30° ; 45° ; 60° ; 90° ; 120° ; 135° ; 150° ; 180° ?
12. Сформулируйте свойства косинуса.

949. Постройте полуокружность с центром O и диаметром PQ , равным 2. Найдите такие точки X этой окружности, что:

- а) $\sin \angle XOP = \frac{1}{4}$; в) $\sin \angle XOP > \frac{1}{4}$;
б) $\sin \angle XOP < \frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{4} < \sin \angle XOP < \frac{1}{2}$.

950. Докажите, что:

- а) синус одного из углов треугольника равен синусу суммы двух других его углов;
б) сумма синусов острых углов прямоугольного треугольника больше 1, но меньше 2.

951. Запишите по возрастанию значений выражения:

- а) $\sin 10^\circ$; $\sin 70^\circ$; $\sin 50^\circ$; г) $\sin 42^\circ$; $\sin 130^\circ$; $\sin 57^\circ$;
б) $\sin 36^\circ$; $\sin 64^\circ$; $\sin 140^\circ$; д) $\sin 61^\circ$; $\sin 117^\circ$; $\sin 173^\circ$;
в) $\sin 115^\circ$; $\sin 170^\circ$; $\sin 42^\circ$; е) $\sin 89^\circ$; $\sin 178^\circ$; $\sin 1^\circ$.

952. Укажите истинные утверждения:

- а) если углы равны, то их синусы также равны;
б) если синусы углов равны, то и сами углы равны;
в) если углы не равны, то их синусы также не равны;
г) если синусы углов не равны, то и сами углы не равны;
д) если первый угол больше второго, то и синус первого угла больше синуса второго;

е) если синус первого угла больше синуса второго, то и первый угол больше второго.

953. Найдите значение выражения:

- а) $(\sin 30^\circ \cdot \sin 60^\circ)^2$; д) $(\sin 180^\circ - \sin 30^\circ)^{10}$;
 б) $(\sin 120^\circ + \sin 150^\circ)^2$; е) $(\sin 0^\circ \cdot \sin 90^\circ)^{21}$;
 в) $(\sin 135^\circ : \sin 45^\circ)^4$; ж) $(\sin 180^\circ : \sin 135^\circ)^{11}$;
 г) $(\sin 90^\circ - \sin 150^\circ)^3$; з) $(\sin 45^\circ : \sin 180^\circ)^3$.

954. Найдите значение выражения:

- а) $\sin 91^\circ$; в) $\sin 121^\circ$; д) $\sin 99^\circ$; ж) $\sin 178^\circ$;
 б) $\sin 103^\circ$; г) $\sin 147^\circ$; е) $\sin 167^\circ$; з) $\sin 130^\circ$.

955. Найдите острый угол, синус которого равен:

- а) 0,1736; в) 0,6561; д) 0,0175;
 б) 0,9703; г) 0,9945; е) 0,4384.

956. Найдите тупой угол, синус которого равен:

- а) 0,9848; в) 0,3507; д) 0,9272;
 б) 0,7386; г) 0,6157; е) 0,0523.

957. Найдите углы, синус которых равен:

- а) 0,2233; в) 0,7982; д) 0,4725;
 б) 0,3241; г) 0,2340; е) 0,9981.

958. Проекция отрезка m на прямую a равна m_1 . Угол между прямой a и прямой, содержащей отрезок m , равен α (рис. 426). Запишите зависимость:

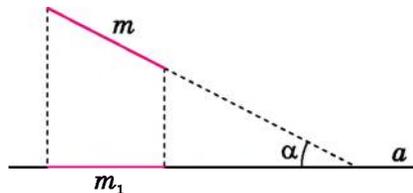


Рис. 426

- а) переменной m_1 от переменных m и α ;
 б) переменной m от переменных m_1 и α ;
 в) переменной α от переменных m и m_1 .

Найдите те значения, которых недостает в таблице.

m	1	1	1	1	1	1			
m_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1				1	1	1
α				60°	50°	90°	20°	45°	30°

959. В формуле, выражающей зависимость переменной m_1 от переменных m и α (см. рис. 426), зафиксируйте значение переменной m . Пусть значение переменной α возрастает от 0° до 90° . Как при этом ведет себя переменная m_1 ?

960. Определите смещения подвижного конца часовой стрелки, длина которой равна 15 см, по вертикали и по горизонтали при переходе ее из положения, которое она занимает в 12 ч, в положение, которое она занимает в:

- а) 13 ч; в) 13 ч 30 мин;
б) 14 ч; г) 14 ч 45 мин.

961. Прямая a проходит через конец U отрезка UV и составляет с ним угол δ . Когда отрезок повернули на 90° вокруг точки U , он занял положение UV_1 , причем точки V и V_1 оказались по одну сторону от прямой a . Найдите сумму проекций AB отрезков UV и UV_1 на прямую a . Укажите, как изменяется длина отрезка AB при изменении угла δ от 0° до 90° .

962. Из точки E на стороне угла A провели перпендикуляр EF к другой стороне угла, затем из точки F — перпендикуляр FG к первой стороне. Найдите синус угла A и отрезок FA , учитывая, что перпендикуляры EF и FG соответственно равны k и l .

963. Найдите косинусы углов равнобедренного треугольника, если его высоты равны m и n .

964. Найдите значение выражения:

- а) $(\cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ)^2$; д) $(\cos 180^\circ - \cos 60^\circ)^5$;
б) $(\cos 120^\circ + \cos 150^\circ)^2$; е) $(\cos 0^\circ \cdot \cos 90^\circ)^{21}$;
в) $(\cos 135^\circ : \cos 45^\circ)^{15}$; ж) $(\cos 180^\circ : \cos 135^\circ)^{10}$;
г) $(\cos 90^\circ - \cos 150^\circ)^4$; з) $(\cos 45^\circ : \cos 180^\circ)^3$.

965. Найдите значение выражения:

- а) $\cos 45^\circ + \sin 60^\circ$; ж) $(\cos 60^\circ)^4$;
б) $\sin 45^\circ - \cos 60^\circ$; з) $(\cos 45^\circ)^6$;
в) $\cos 45^\circ : \sin 60^\circ$; и) $\sin 45^\circ : \cos 135^\circ$;
г) $\sin 45^\circ \cdot \cos 60^\circ$; к) $\cos 45^\circ \cdot \cos 135^\circ$;
д) $\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ$; л) $\cos 120^\circ : \cos 60^\circ$;
е) $\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ$; м) $\cos 120^\circ - \cos 60^\circ$.

966. Запишите по возрастанию значений выражения:

- а) $\cos 20^\circ$; $\cos 80^\circ$; $\cos 50^\circ$; г) $\cos 42^\circ$; $\cos 140^\circ$; $\cos 57^\circ$;
б) $\cos 36^\circ$; $\cos 73^\circ$; $\cos 140^\circ$; д) $\cos 61^\circ$; $\cos 119^\circ$; $\cos 176^\circ$;
в) $\cos 105^\circ$; $\cos 165^\circ$; $\cos 31^\circ$; е) $\cos 88^\circ$; $\cos 177^\circ$; $\cos 2^\circ$.

967. Укажите верные утверждения:

- а) если углы равны, то их косинусы также равны;
б) если косинусы углов равны, то и сами углы равны;
в) если углы не равны, то их косинусы также не равны;
г) если косинусы углов не равны, то и сами углы не равны;
д) если первый угол больше второго, то и косинус первого угла больше косинуса второго;
е) если косинус первого угла больше косинуса второго, то первый угол меньше второго.

968. Начертите такой угол α , что:

- а) $\sin \alpha < \frac{1}{3}$ и $\cos \alpha < \frac{1}{3}$; в) $\sin \alpha > \frac{1}{3}$ и $\cos \alpha < \frac{1}{3}$;
б) $\sin \alpha < \frac{1}{3}$ и $\cos \alpha > \frac{1}{3}$; г) $\sin \alpha > \frac{1}{3}$ и $\cos \alpha > \frac{1}{3}$.

969. Докажите, что:

- а) если $\sin \alpha = \cos \beta$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, то $\alpha + \beta = 90^\circ$;
б) если $\cos \alpha = -\cos \beta$ и $\beta < 90^\circ$, то $\alpha + \beta = 180^\circ$.

970. Докажите, что если $\cos \alpha < \cos \beta$ и α и β — острые углы, то $\alpha > \beta$. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для случая, когда:

- а) α и β — тупые углы;
б) α — острый угол, а β — тупой угол.

971. Грани PMN и KMN пирамиды $PKMN$ — равные равнобедренные треугольники с общим основанием MN (рис. 427). Медианы PQ и KQ граней PMN и KMN перпендикулярны. Найдите площадь поверхности пирамиды, учитывая, что ребро MN и угол PMN соответственно равны b и α .

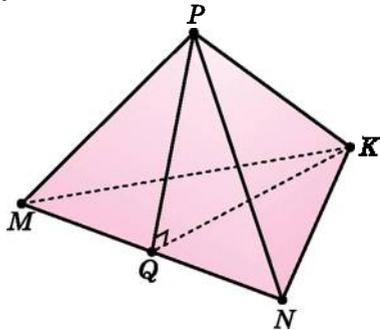


Рис. 427

972. Найдите значение выражения:

- а) $\cos 108^\circ$; в) $\cos 130^\circ$; д) $\cos 98^\circ$;
б) $\cos 110^\circ$; г) $\cos 152^\circ$; е) $\cos 170^\circ$.

973. С точностью до трех значащих цифр найдите значение выражения:

- а) $\cos 33^\circ + \cos 159^\circ$; г) $\cos 72^\circ : \cos 79^\circ$;
б) $\cos 15^\circ - \cos 44^\circ$; д) $\sqrt{13} : \cos 77^\circ$;
в) $\cos 19^\circ \cdot \cos 23^\circ$; е) $\cos 50^\circ - \sqrt{3}$.

974. Найдите угол, косинус которого равен:

- а) 0,0193; в) 0,6656; д) -0,7712;
б) -0,4713; г) -0,4300; е) -0,9110.

975. Докажите, что формулы $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ и $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ истинны для любых углов α из промежутка $[0^\circ; 180^\circ]$.

976. Прямая, проходящая через точку A на стороне MN треугольника MNP параллельно стороне MP , пересекает сторону NP в точке B . Найдите:

- а) сторону MP , учитывая, что $MA = 3$ см, $AB = 7$ см, $AN = 5$ см;
б) сторону MN , учитывая, что $MA = 40$ мм, $MP = 80$ мм, $AB = 60$ мм.

977. Биссектриса одного из углов параллелограмма разделяет одну из его сторон на отрезки, равные 8 см и 15 см. Найдите возможные значения периметра параллелограмма.

978. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 28 дм и отличается от периметра треугольника ABD на 8 дм. Найдите стороны параллелограмма и его диагональ BD , учитывая, что высота, проведенная из вершины B , разделяет сторону AD пополам.

979. Суммарная масса двух кусков латуни равна 30 кг, причем в первом из них меди 13 кг, во втором — 8 кг. Найдите процентное содержание меди в каждом из кусков, учитывая, что во втором куске оно на 15 процентных пунктов больше.

980. Два дачных участка вместе занимают площадь в 16 а. На первом из них картофелем занято 5 а, на втором — 4,5 а. Определите, сколько процентов каждого участка занято картофелем, учитывая, что этот показатель больше для второго участка на 25 процентных пунктов.

981. Сократите дробь:

а) $\frac{c^2 + c - 12}{c^2 + 8c + 16}$;

в) $\frac{4e^2 + 12e + 9}{2e^2 - e - 6}$;

б) $\frac{d^n + 2d^{n-1} - 3d^{n-2}}{d^2 + 5d + 6}$;

г) $\frac{f^3 + f^2 - f - 1}{f^2 + 2f + 1}$.

982. Докажите, что сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше 2.

983. Докажите, что произведение суммы трех положительных чисел и суммы чисел, им обратных, не меньше 9.

* * *

984. Есть число 215 673 826 950 631. Его умножают на 6 и в полученном произведении вычеркивают цифру десятков в каком-либо классе. С новым числом поступают так же, пока не получится однозначное число. Каким может быть это однозначное число?

985. Около вершин куба записаны числа от 1 до 8. На каждом ребре записывается модуль разности чисел, записанных на его концах. Может ли сумма чисел, записанных на ребрах, быть равной:

- а) 48; б) 49?

986. На одной стороне угла с вершиной O отложены равные отрезки OA , AB и BC , а на другой стороне — равные отрезки OK , KL и LM (рис. 428). Докажите, что треугольники ALC и KBM равновелики.

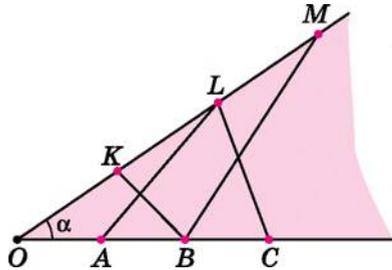


Рис. 428

29. Тангенс и котангенс углов от 0° до 180°

A. Как и для острых углов, тангенсом угла называется отношение синуса этого угла к его косинусу:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Из этого определения следует, что *тангенс прямого угла не существует*, так как $\cos 90^\circ = 0$, и отношение $\frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ}$ не имеет значения.

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3};$$

$$\operatorname{tg} 135^\circ = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1;$$

$$\operatorname{tg} 150^\circ = \frac{\sin 150^\circ}{\cos 150^\circ} = \frac{1}{2} : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{tg} 180^\circ = \frac{\sin 180^\circ}{\cos 180^\circ} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Результаты вычислений, полученные в параграфе 17 и в этом параграфе, сведем в таблицу.

Угол α , °	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Тангенс угла α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

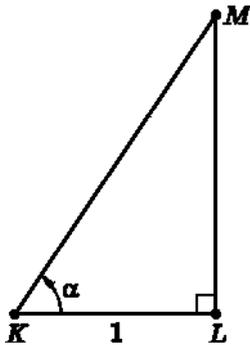


Рис. 429

Обоснуем некоторые свойства тангенса.
Если угол возрастает от 0° до 90° , то его тангенс возрастает от 0 до бесконечности.

Чтобы доказать это, рассмотрим прямоугольный треугольник KLM с прямым углом L и катетом KL , равным единице (рис. 429). Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{LM}{KL} = \frac{LM}{1} = LM,$$

т. е. тангенс угла равен противолежащему катету прямоугольного треугольника, в котором прилежащий катет равен единице. Если угол α увеличивается от 0° до 90° , то катет LM увеличивается от 0 до бесконечности.

Если угол возрастает от 90° до 180° , то его тангенс возрастает от минус бесконечности до нуля.

Обоснуйте это свойство самостоятельно.

Величина угла определяется его тангенсом, т. е. по значению тангенса угла можно найти сам угол.

Например, если известно, что $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, то сам угол α равен 60° , если $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$, то угол α равен 120° .

Обоснуйте сами, что

$$\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

если α — угол из промежутка $[0^\circ; 90^\circ)$ или из промежутка $(90^\circ; 180^\circ]$.

Б. Напомним, что котангенсом угла называется отношение косинуса угла к его синусу:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Котангенс нулевого и развернутого углов не существует,

так как $\sin 0^\circ = 0$ и $\sin 180^\circ = 0$, и отношения $\frac{\cos 0^\circ}{\sin 0^\circ}$ и $\frac{\cos 180^\circ}{\sin 180^\circ}$ не имеют значения.

Теорема 14. *Котангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего к углу катета к противолежащему.*

Доказательство. Выразим котангенс острого угла C прямоугольного треугольника CDE через его стороны (рис. 430).
Имеем:

$$\sin C = \frac{DE}{CD}; \quad \cos C = \frac{CE}{CD}.$$

Поэтому

$$\operatorname{ctg} C = \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{CE}{CD} : \frac{DE}{CD} = \frac{CE}{DE}.$$

Таким образом, котангенс острого угла C прямоугольного треугольника CDE равен отношению прилежащего катета CE к противолежащему катету DE .

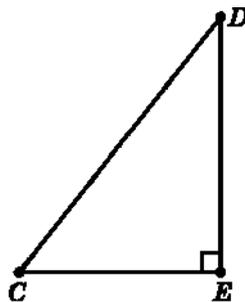


Рис. 430

Теорема 15. *Тангенс и котангенс одного и того же угла α связаны соотношением*

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Доказательство. По определению

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1.$$

Доказанное равенство позволяет по значению тангенса находить значение котангенса того же угла. Используя это, получим таблицу значений котангенса для некоторых углов.

Угол α , °	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Котангенс угла α	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не существует

Равенство $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ позволяет по свойствам тангенса сформулировать свойства котангенса.

Если угол возрастает от 0° до 180° , то его котангенс убывает от плюс бесконечности ($+\infty$) до минус бесконечности ($-\infty$).

Величина угла определяется его котангенсом, т. е. по значению котангенса угла можно найти сам угол.

Например, если известно, что $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$, то сам угол α равен 30° , если $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{3}$, то угол α равен 150° .

Для углов больше 90° пользуются формулой

$$\operatorname{ctg} \alpha = -\operatorname{ctg} (180^\circ - \alpha).$$

С помощью калькулятора находим:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} 33^\circ &= 1,540; & \operatorname{ctg} 89^\circ &= 0,01746; \\ \operatorname{ctg} 109^\circ &= -\operatorname{ctg} (180^\circ - 109^\circ) = -\operatorname{ctg} 71^\circ = -0,3443. \end{aligned}$$

С помощью калькулятора или по таблицам решают и обратную задачу.



1. Как определяется тангенс угла?
2. Какой смысл имеет тангенс острого угла прямоугольного треугольника?
3. Чему равен тангенс угла в 0° ; 30° ; 45° ; 60° ; 120° ; 135° ; 150° ; 180° ?
4. Сформулируйте свойства тангенса.
5. Как найти тангенс данного угла?
6. Как определяется котангенс угла?
7. Какой смысл имеет котангенс острого угла прямоугольного треугольника?
8. Каким соотношением связаны тангенс и котангенс одного угла?
9. Чему равен котангенс угла в 30° ; 45° ; 60° ; 90° ; 120° ; 135° ; 150° ?
10. Сформулируйте свойства котангенса.
11. Как найти котангенс данного угла?
12. Как найти угол по его котангенсу?

987. Докажите, что для смежных углов истинны равенства:

а) $\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$; б) $\operatorname{ctg} (180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$.

988. Докажите, что для углов α и $90^\circ - \alpha$, дополняющих друг друга до 90° , истинны равенства:

а) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$; б) $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$.

989. Найдите котангенсы углов и сами углы треугольника по данным, приведенным на рисунке:

- а) 431; б) 432; в) 433.

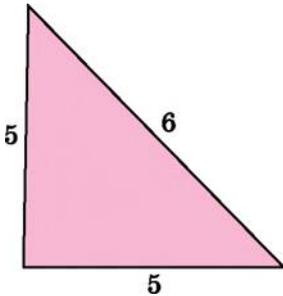


Рис. 431

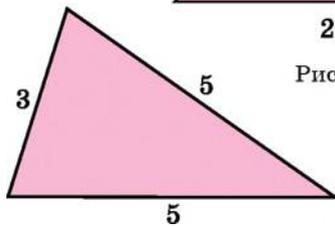


Рис. 433

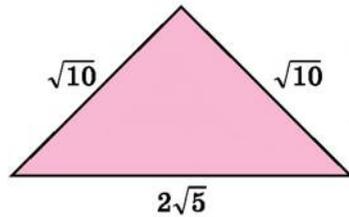


Рис. 432

990. Найдите котангенс угла, учитывая, что его тангенс равен:

- а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{8}$; в) $-\frac{2}{5}$; г) $\frac{1}{\sqrt{8}}$; д) $-\frac{3}{5}$; е) a .

991. Найдите тангенс угла, учитывая, что его котангенс равен:

- а) $\frac{1}{8}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$; в) $-\frac{1}{10}$; г) 0,2; д) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; е) $-a$.

992. Определите, могут ли тангенс и котангенс одного угла быть равными соответственно:

- а) $\frac{1}{2}$ и 2; в) 5 и 0,2; д) 40 и 0,25;
 б) $\frac{1}{2}$ и -2; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sqrt{2}$; е) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ и $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}$.

993. Определите, при каких значениях переменной a тангенс и котангенс соответственно равны:

- а) a и $\frac{1}{a}$; б) a и $2a$; в) a и $-a$; г) $\frac{a^2}{4}$ и $\frac{2}{a}$.

994. Расстояния от точки X до двух взаимно перпендикулярных прямых m и n соответственно равны a и b , а от

точки Y до этих прямых — соответственно c и d . Найдите угол между прямой XU и прямой:

- а) m ; б) n .

995. Диагонали CE и DF прямоугольной трапеции $CDEF$ с прямым углом C перпендикулярны. Докажите, что $\frac{KE}{KD} = \frac{KD}{KC} = \frac{KC}{KF}$, где K — точка пересечения диагоналей.

996. Запишите по возрастанию значений выражения:

- а) $\operatorname{tg} 10^\circ$; $\operatorname{tg} 70^\circ$; $\operatorname{tg} 50^\circ$; г) $\operatorname{tg} 142^\circ$; $\operatorname{tg} 130^\circ$; $\operatorname{tg} 157^\circ$;
б) $\operatorname{tg} 36^\circ$; $\operatorname{tg} 64^\circ$; $\operatorname{tg} 140^\circ$; д) $\operatorname{tg} 61^\circ$; $\operatorname{tg} 117^\circ$; $\operatorname{tg} 173^\circ$;
в) $\operatorname{tg} 115^\circ$; $\operatorname{tg} 170^\circ$; $\operatorname{tg} 42^\circ$; е) $\operatorname{tg} 89^\circ$; $\operatorname{tg} 179^\circ$; $\operatorname{tg} 1^\circ$.

997. Запишите по возрастанию значений выражения:

- а) $\operatorname{ctg} 10^\circ$; $\operatorname{ctg} 70^\circ$; $\operatorname{ctg} 50^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 142^\circ$; $\operatorname{ctg} 130^\circ$; $\operatorname{ctg} 157^\circ$;
б) $\operatorname{ctg} 36^\circ$; $\operatorname{ctg} 64^\circ$; $\operatorname{ctg} 140^\circ$; д) $\operatorname{ctg} 61^\circ$; $\operatorname{ctg} 117^\circ$; $\operatorname{ctg} 173^\circ$;
в) $\operatorname{ctg} 115^\circ$; $\operatorname{ctg} 170^\circ$; $\operatorname{ctg} 42^\circ$; е) $\operatorname{ctg} 89^\circ$; $\operatorname{ctg} 179^\circ$; $\operatorname{ctg} 1^\circ$.

998. Укажите верные утверждения:

- а) если углы равны, то их тангенсы также равны;
б) если тангенсы углов равны, то и сами углы равны;
в) если углы не равны, то их тангенсы также не равны.

999. Укажите верные утверждения:

- а) если котангенсы углов не равны, то и сами углы не равны;
б) если первый угол больше второго, то и котангенс первого угла больше котангенса второго;
в) если котангенс первого угла больше котангенса второго, то первый угол меньше второго.

1000. Начертите угол α такой, что:

- а) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$; в) $\operatorname{tg} \alpha > 4$;
б) $\operatorname{tg} \alpha < -\frac{1}{8}$; г) $1 < \operatorname{tg} \alpha < 2$.

1001. Начертите угол α такой, что:

- а) $\operatorname{tg} \alpha = -0,5$; в) $\operatorname{tg} \alpha \leq 0,75$;
б) $\operatorname{tg} \alpha > -5$; г) $-2 < \operatorname{tg} \alpha \leq -1$.

1002. Точки M_1 и O_1 — середины противоположных сторон NO и MP параллелограмма $MNOP$ (рис. 434). Докажите, что прямые MM_1 и OO_1 разделяют диагональ NP на три доли.

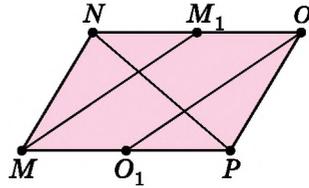


Рис. 434

1003. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник, стороны которого относятся как 2 : 5. Найдите эти стороны, учитывая, что:

- а) гипотенуза равна 63 см и на ней находится одна вершина прямоугольника;
- б) гипотенуза равна 72 см и на ней находятся две вершины прямоугольника.

1004. Треугольник TUV задан координатами своих вершин (рис. 435). Найдите:

- а) стороны треугольника;
- б) площадь треугольника;
- в) высоты треугольника;
- г) медианы треугольника;
- д) площадь треугольника, образованного средними линиями;
- е) уравнения прямых, проходящих через стороны треугольника;
- ж) уравнения прямых, содержащих медианы треугольника;
- з) уравнения прямых, содержащих средние линии треугольника.

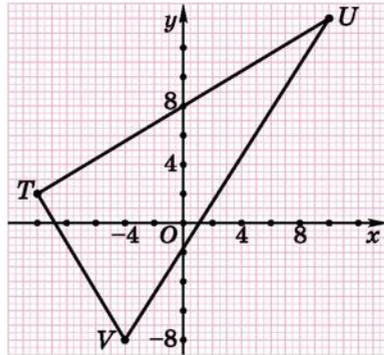


Рис. 435

1005. Докажите, что количество диагоналей выпуклого n -угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

1006. Найдите многоугольник, количество диагоналей которого равно:

- а) 35; б) 9; в) 12; г) количеству сторон.

1007. Разложите на множители трехчлен:

- а) $x^2 + 7x + 10$; в) $2a^2 + 3a - 6,48$;
- б) $z^2 + 3z - 108$; г) $30b^2 + 37b + 10$.

1008. Нарисуйте в тетради треугольник XYZ и отрезок AB . Постройте треугольник, подобный треугольнику XYZ , с периметром, равным длине отрезка AB .

1009. Найдите множество всех точек, расстояния которых до сторон данного угла относятся как:

- а) $1 : 2$; б) $k : l$.

1010. Через точку M внутри угла A проведите прямую так, чтобы точка M разделяла отрезок этой прямой, заключенный между сторонами угла, в отношении:

- а) $4 : 7$; б) $k : l$.

1011. Найдите такую точку треугольника, расстояния которой до сторон относятся как:

- а) $1 : 2 : 3$; б) $k : l : m$.

1012. В данный сегмент впишите квадрат так, чтобы одна его сторона лежала на хорде, а две вершины — на дуге.

1013. В данный треугольник впишите прямоугольник, стороны которого относятся как:

- а) $3 : 4$; б) $k : l$.

1014. Найдите площадь трапеции, у которой основания равны 20 см и 32 см, а боковые стороны — 5 см и 13 см.

1015. Найдите площадь трапеции, у которой основания равны 12 дм и 72 дм, а диагонали — 85 дм и 13 дм.

1016. Основания прямоугольной трапеции и один из ее углов равны соответственно a , b и α . Найдите периметр и площадь трапеции, учитывая, что:

- а) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $\alpha = 60^\circ$;
б) $a = 12$ дм, $b = 8$ дм, $\alpha = 30^\circ$;
в) $a = 4$ м, $b = 8$ м, $\alpha = 45^\circ$;
г) $a = 40$ мм, $b = 90$ мм, $\alpha = 120^\circ$.

1017. Найдите координаты точки пересечения графиков зависимостей:

- а) $2a + m = 5$ и $a - m = 1$; в) $2x + 3z = 9$ и $z - 3 = 0$;
б) $c + n = 12$ и $2c - n = 0$; г) $6k - 2x = 1$ и $9k - 2x = -5$.

1018. График линейной функции пересекает ось абсцисс в точке $K(4; 0)$, а ось ординат — в точке $L(0; 11)$. Запишите уравнение, задающее эту функцию.

* * *

1019. Определите, сколько есть трехзначных чисел, у каждого из которых после приписывания справа одной цифры получается четырехзначное число, кратное 17.

1020. В футбольном турнире с 20 командами сыграно 8 туров: каждая команда сыграла с восемью другими. Докажите, что есть 3 команды, которые пока что не сыграли между собой ни одного матча.

1021. Есть два прямоугольных треугольника с общим прямым углом O (рис. 436). Докажите, что если медиана OO_1 , проведенная к гипотенузе PQ одного треугольника, перпендикулярна гипотенузе QR другого треугольника, то медиана OO_2 , проведенная к гипотенузе QR другого треугольника, перпендикулярна гипотенузе PQ первого треугольника.

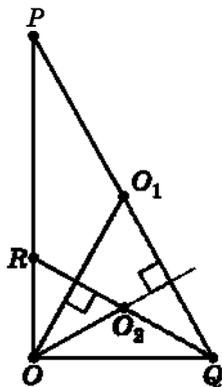


Рис. 436

1022. На тренировке Алесь и Михась должны пробежать определенную дистанцию, для чего Алесю нужно сделать 20 кругов по одной дорожке, а Михасю — 18 кругов по другой. Они стартовали одновременно, и в момент, когда Михась пробежал 12 кругов, Алесь был в 150 м от места своего старта. Определите длину дистанции, учитывая, что мальчики бежали с одинаковыми скоростями.

1023. С помощью цифр 1, 5, 9 записали семизначное число. Какой остаток оно может дать при делении на 4?

1024. Пусть стороны треугольника ABC таковы, что $AB \geq BC \geq AC$. Докажите, что если M — произвольная внутренняя точка этого треугольника, то $MA + MB + MC > AB + BC$.

30. Свойства и применения синуса, косинуса, тангенса и котангенса

А. Теорема 16. Синус, косинус, тангенс и котангенс одного аргумента связаны равенствами:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Доказательство. Два первых тождества являются определениями, два следующих тождества уже доказаны. Докажем пятое тождество.

Разделим обе части тождества $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ на $\cos^2 \alpha$:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ или } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Аналогично доказывается шестое тождество.

Теорема 17. Для синуса, косинуса, тангенса и котангенса верны следующие формулы приведения:

$$\begin{array}{ll} \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha; & \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha; \\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha; & \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha; & \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha; & \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha; \end{array}$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha;$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Доказательство. Тождества

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

доказаны ранее.

Тождество $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$ доказывается так:

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Так же доказывается тождество $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$.

Тождество $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ можно доказать так:

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ + \alpha) & \stackrel{(1)}{=} \sin(180^\circ - (90^\circ + \alpha)) \stackrel{(2)}{=} \\ & = \sin(180^\circ - 90^\circ - \alpha) \stackrel{(3)}{=} \\ & = \sin(90^\circ - \alpha) \stackrel{(4)}{=} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Переход (1) выполнен на основании тождества $\sin \beta = \sin(180^\circ - \beta)$ для значения β , равного $90^\circ + \alpha$, переход (2)

заклучался в раскрытии скобок, при переходе (3) выполнено приведение подобных, при переходе (4) использовано тождество $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

Тождества

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha, \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha, \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

доказываются аналогичными преобразованиями.

Б. Теорема 18. *Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон и синуса угла между ними:*

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma.$$

Доказательство. Пусть стороны CB и CA и угол C треугольника ABC соответственно равны a , b и γ (рис. 437). Из вершины B проведем высоту BB_1 . Мы знаем, что

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} CA \cdot BB_1.$$

Из треугольника CBB_1 находим,

что $\sin C = \frac{BB_1}{CB}$. Поэтому

$$BB_1 = CB \cdot \sin C.$$

Значит,

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin C,$$

или

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma.$$

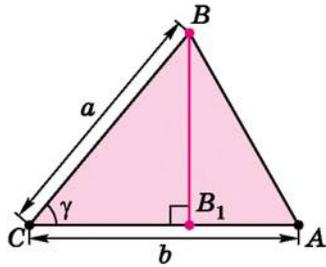


Рис. 437

В. Установленные соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника дают возможность **решать прямоугольные треугольники**, т. е. по определенному набору элементов прямоугольного треугольника находить другие его элементы. Рассмотрим некоторые задачи на решение прямоугольных треугольников.

Задача 1. Известны гипотенуза и один из острых углов прямоугольного треугольника. Найдите другие элементы этого треугольника.

Пусть гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна c , а его острый угол A равен α (рис. 438). Можно сразу найти другой острый угол:

$$\angle B = 90^\circ - \alpha.$$

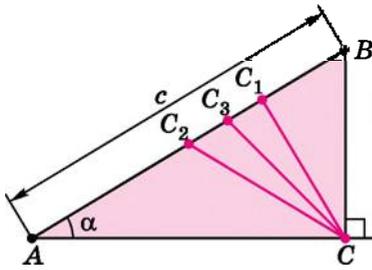


Рис. 438

Если $\alpha = 31^\circ$, то $\angle B = 90^\circ - 31^\circ = 59^\circ$.

Поскольку $\sin A = \frac{BC}{AB}$, то для катета BC получим

$$BC = AB \cdot \sin A = c \cdot \sin \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{Если } \alpha = 31^\circ \text{ и } c = 59 \text{ мм,} \\ \text{то } BC = 59 \text{ мм} \cdot \sin 31^\circ \approx \\ \approx 59 \cdot 0,5150 \text{ мм} = 30,385 \text{ мм} \approx \\ \approx 30 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Другой катет AC можно найти разными способами. Можно, используя найденный угол B , вычислить его, как и катет BC :

$$AC = AB \cdot \sin B = 59 \text{ мм} \cdot \sin 59^\circ \approx 59 \cdot 0,8572 \text{ мм} \approx 50,57 \text{ мм} \approx 51 \text{ мм.}$$

Можно использовать косинус угла A :

$$AC = AB \cdot \cos A.$$

Можно использовать и теорему Пифагора:

$$\begin{aligned} AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} \approx \sqrt{59^2 - 30^2} \text{ мм} = \sqrt{3481 - 900} \text{ мм} = \\ = \sqrt{2581} \text{ мм} \approx 50,80 \text{ мм} \approx 51 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Теперь мы знаем основные элементы треугольника — его стороны и углы. Можно найти и другие его характеристики. Найдем, например, его площадь:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \approx \frac{1}{2} \cdot 51 \cdot 30 \text{ мм}^2 = 765 \text{ мм}^2.$$

Для высоты CC_1 , проведенной к гипотенузе, получим:

$$CC_1 = \frac{2S}{AB} \approx \frac{2 \cdot 765}{59} \text{ мм} \approx 25,93 \text{ мм} \approx 26 \text{ мм.}$$

Найдем медиану CC_2 , проведенную к гипотенузе:

$$CC_2 = \frac{1}{2} \cdot AB \approx \frac{1}{2} \cdot 59 \text{ мм} \approx 29,5 \text{ мм.}$$

Найдем биссектрису CC_3 , проведенную к гипотенузе:

$$\begin{aligned} \angle BCC_1 &= 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 59^\circ = 31^\circ; \\ \angle C_1CC_3 &= \angle BCC_3 - \angle BCC_1 = 45^\circ - 31^\circ = 14^\circ; \\ CC_3 &= \frac{CC_1}{\cos C_1CC_3} \approx \frac{26}{\cos 14^\circ} \text{ мм} \approx \frac{26}{0,9703} \text{ мм} \approx 26,80 \text{ мм} \approx 27 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Синус, косинус, тангенс и котангенс дают возможность решать практические задачи.

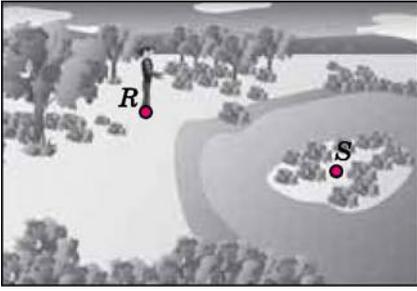


Рис. 439

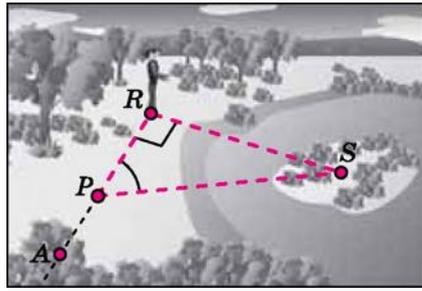


Рис. 440

Задача 2. Найдем расстояние между двумя точками R и S , одна из которых R находится на берегу озера, другая S на острове в озере (рис. 439).

Чтобы решить эту задачу, построим прямой угол SRA с вершиной в точке R (рис. 440). На луче RA отметим точку P , расстояние которой от точки R может быть измерено. С помощью угломера определяем угол RPS . Тогда

$$\operatorname{tg} RPS = \frac{RS}{RP}, \text{ или } RS = RP \cdot \operatorname{tg} RPS.$$

Пусть, например, $RP = 200$ м, $\angle RPS = 48^\circ$. Тогда

$$RS = RP \cdot \operatorname{tg} RPS = 200 \text{ м} \cdot \operatorname{tg} 48^\circ \approx 200 \cdot 1,111 \text{ м} \approx 222 \text{ м}.$$

Синус, косинус, тангенс, котангенс и их применение изучает раздел математики *тригонометрия*.

Тригонометрия развивалась, прежде всего, в связи с потребностями географии, астрономии, навигации. Ее элементы использовались уже в Древнем Вавилоне и Древней Греции. В специальный раздел математики тригонометрия выделилась в работах известного азербайджанского ученого-энциклопедиста Насирэдина ад-Туси (1201—1274). В Европе первое изложение тригонометрии сделал немецкий астроном и математик Региомонтан (1486—1476). Современное изложение тригонометрии получила в работах математика, механика и физика Л. Эйлера (1707—1783).

- ?**
1. Что изучает тригонометрия?
 2. Запишите тождества, связывающие между собой синус, косинус, тангенс и котангенс одного угла.
 3. Запишите формулы приведения.
 4. Запишите известные вам формулы площади треугольника.
 5. Что означает задание *решить прямоугольный треугольник*?

1025. Найдите значение выражений $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, учитывая, что:

а) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

б) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

- в) $\sin \alpha = \frac{7}{25}$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;
 г) $\sin \alpha = \frac{24}{25}$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;
 д) $\sin \alpha = \frac{5}{6}$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;
 е) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7}$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

1026. Найдите значение выражений $\sin \beta$, $\operatorname{tg} \beta$, $\operatorname{ctg} \beta$, учитывая, что:

- а) $\cos \beta = \frac{8}{17}$; в) $\cos \beta = -\frac{9}{41}$; д) $\cos \beta = \frac{11}{12}$;
 б) $\cos \beta = -\frac{8}{17}$; г) $\cos \beta = \frac{40}{41}$; е) $\cos \beta = -\frac{6\sqrt{2}}{11}$.

1027. Найдите значение выражений $\sin \gamma$, $\cos \gamma$, $\operatorname{ctg} \gamma$, учитывая, что:

- а) $\operatorname{tg} \gamma = \frac{20}{21}$; в) $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{12}{35}$; д) $\operatorname{tg} \gamma = -2,4$;
 б) $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{20}{21}$; г) $\operatorname{tg} \gamma = 2\frac{7}{12}$; е) $\operatorname{tg} \gamma = \frac{8}{2\sqrt{10}}$.

1028. Найдите значение выражений $\sin \delta$, $\cos \delta$, $\operatorname{tg} \delta$, учитывая, что:

- а) $\operatorname{ctg} \delta = -\frac{11}{60}$; в) $\operatorname{ctg} \delta = \frac{7}{24}$; д) $\operatorname{ctg} \delta = 0,225$;
 б) $\operatorname{ctg} \delta = 4\frac{4}{9}$; г) $\operatorname{ctg} \delta = -6\frac{6}{13}$; е) $\operatorname{ctg} \delta = -\frac{2\sqrt{14}}{5}$.

1029. Определите, верны ли одновременно равенства:

- а) $\sin v = \frac{1}{5}$ и $\operatorname{tg} v = \frac{1}{\sqrt{24}}$; в) $\sin \alpha = 0,6$ и $\operatorname{ctg} \alpha = -1\frac{1}{3}$;
 б) $\cos \varepsilon = \frac{15}{17}$ и $\operatorname{ctg} \varepsilon = -1,875$; г) $\operatorname{ctg} \varphi = -\frac{7}{12}$ и $\operatorname{tg} \varphi = -1\frac{5}{7}$.

1030. Упростите выражение:

- а) $1 - \sin^2 \alpha$; в) $\sin^2 \gamma - 1$; д) $(1 + \sin \beta)(1 - \sin \beta)$;
 б) $1 - \cos^2 \beta$; г) $\cos^2 2\omega - 1$; е) $\left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{\alpha}{2}\right)$.

1031. Найдите $\cos \beta$, учитывая, что $\cos^4 \beta - \sin^4 \beta = \frac{1}{8}$.

1032. Учтывая, что $\operatorname{tg} \alpha = 2$, найдите значение выражения:

- а) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}$; в) $\frac{2\sin \alpha + 3\cos \alpha}{3\sin \alpha - 7\cos \alpha}$;
 б) $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$; г) $\frac{\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$.

1033. Докажите тождество:

а) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;

б) $\sin^2 \beta + \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta + \cos^4 \beta = 1$;

в) $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$;

г) $\frac{\sin \beta}{1 - \cos \beta} = \frac{1 + \cos \beta}{\sin \beta}$;

д) $1 + \sin \alpha = \frac{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}$;

е) $\frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 1 + \cos \alpha$.

1034. Докажите тождество:

а) $\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi} = \sin^2 \varphi$;

г) $\frac{1 + \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$;

б) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \cos^2 \alpha$;

д) $\frac{(\sin \beta + \cos \beta)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \beta - \sin \beta \cdot \cos \beta} = 2\operatorname{tg}^2 \beta$;

в) $\frac{1 + \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{ctg} \beta} = \operatorname{tg} \beta$;

е) $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 2\operatorname{ctg}^2 \alpha$.

1035. Значением функции дополнительного угла замените значение выражения:

а) $\cos 55^\circ$;

в) $\sin 12^\circ$;

д) $\operatorname{tg} 9^\circ$;

ж) $\operatorname{ctg} 1^\circ$;

б) $\cos 81^\circ$;

г) $\sin 76^\circ$;

е) $\operatorname{tg} 59^\circ$;

з) $\operatorname{ctg} 79^\circ$.

1036. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$, учитывая, что α и β — острые углы прямоугольного треугольника;

б) $\operatorname{tg} 41^\circ \cdot \operatorname{tg} 42^\circ \cdot \operatorname{tg} 43^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 48^\circ \cdot \operatorname{tg} 49^\circ$;

в) $\operatorname{ctg} 5^\circ \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ \cdot \operatorname{ctg} 25^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 75^\circ \cdot \operatorname{ctg} 85^\circ$;

г) $(\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 30^\circ + \sin 40^\circ) - (\cos 50^\circ + \cos 60^\circ + \cos 70^\circ + \cos 80^\circ)$.

1037. Значением функции смежного угла замените значение выражения:

а) $\cos 55^\circ$;

в) $\sin 12^\circ$;

д) $\operatorname{tg} 29^\circ$;

ж) $\operatorname{ctg} 11^\circ$;

б) $\cos 125^\circ$;

г) $\sin 171^\circ$;

е) $\operatorname{tg} 159^\circ$;

з) $\operatorname{ctg} 169^\circ$.

1038. К значению функции угла меньше 45° приведите значение выражения:

а) $\sin 78^\circ$;

в) $\operatorname{tg} 174^\circ$;

д) $\operatorname{ctg} 169^\circ$;

ж) $\cos 69^\circ$;

б) $\cos 123^\circ$;

г) $\sin 181^\circ$;

е) $\operatorname{tg} 46^\circ$;

з) $\operatorname{ctg} 46^\circ$.

1039. Вычислите сумму:

- а) $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$;
 б) $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \dots + \operatorname{tg} 160^\circ + \operatorname{tg} 180^\circ$;
 в) $\operatorname{ctg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ + \dots + \operatorname{ctg} 165^\circ$.

1040. Докажите, что:

- а) площадь параллелограмма равна произведению его смежных сторон и синуса угла между ними;
 б) площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей и синуса угла между ними.

1041. Запишите отношение площадей S_1 и S_2 треугольников, используя сведения о треугольниках, данные на рисунке:

- а) 441; б) 442; в) 443; г) 444.

1042. Найдите площадь треугольника, в котором:
 а) высота, проведенная к одной из его сторон, равна h , а углы при этой стороне равны α и β ;

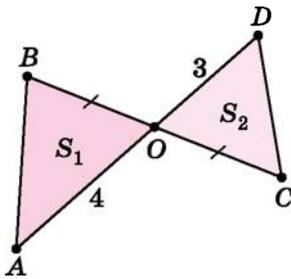


Рис. 441

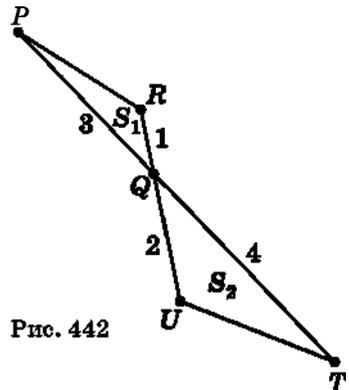


Рис. 442

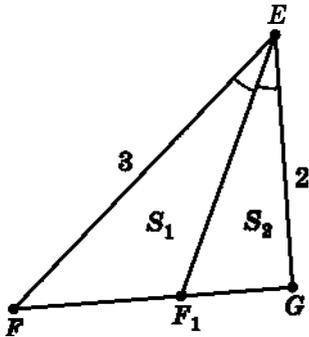


Рис. 443

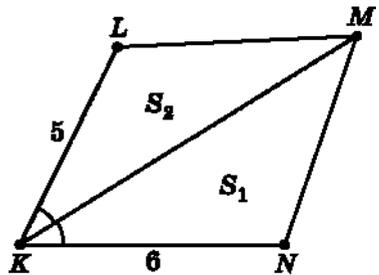


Рис. 444

- б) высоты, проведенные к двум его сторонам, равны h_1 и h_2 , а угол между этими сторонами равен γ ;
 в) сторона равна c , а углы, прилежащие к ней, равны α и β .

1043. Стороны AB , BC , CD , DA четырехугольника $ABCD$ соответственно равны k , l , m , n (рис. 445). Докажите, что площадь S этого четырехугольника удовлетворяет условию:

- а) $S \leq \frac{1}{4}(k+m)(l+n)$;
 б) $S \leq \frac{1}{2}(km+ln)$;
 в) $S \leq \frac{1}{2}(kl+mn)$;
 г) $S \leq \frac{1}{2}(kn+lm)$.

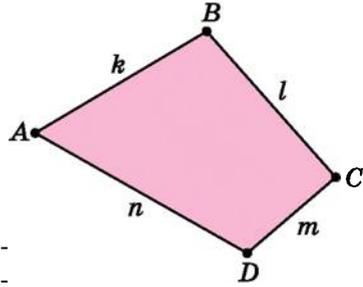


Рис. 445

1044. Углы выпуклого шестиугольника равны друг другу, а стороны через одну равны 1 и 3. Найдите площадь шестиугольника.

1045. Ребра SA , SB , SC треугольной пирамиды $SABC$ соответственно равны m , n , p , а углы ASB , BSC , CSA между этими ребрами — соответственно α , β , γ (рис. 446). Найдите боковую поверхность пирамиды.

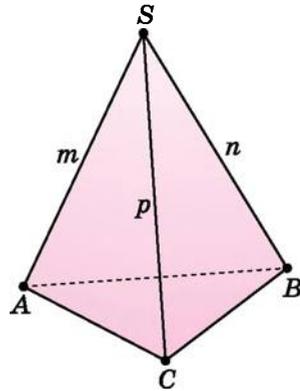


Рис. 446

1046. Гипотенуза и катет прямоугольного треугольника соответственно равны 58 и 42. Найдите:

- а) другой катет и площадь треугольника;
 б) острые углы треугольника;
 в) углы между биссектрисой и высотой, биссектрисой и медианой, проведенными к гипотенузе;
 г) высоту, биссектрису, медиану, проведенные к гипотенузе;
 д) углы между биссектрисой и высотой, биссектрисой и медианой, проведенными к меньшему катету;
 е) высоту, биссектрису, медиану, проведенные к меньшему катету;
 ж) углы между биссектрисой и высотой, биссектрисой и медианой, проведенными к большему катету;

з) высоту, биссектрису, медиану, проведенные к большему катету.

1047. Определите углы треугольников, на которые разделяется параллелограмм своими диагоналями, учитывая, что стороны и высота параллелограмма соответственно равны 50 см, 85 см, 40 см.

1048. Вершины равнобедренного треугольника CDE , в котором угол D против основания равен 70° , лежат на окружности радиусом 60 мм (рис. 447). Определите высоты MN и PQ сегментов, которые отсекаются от круга сторонами треугольника.

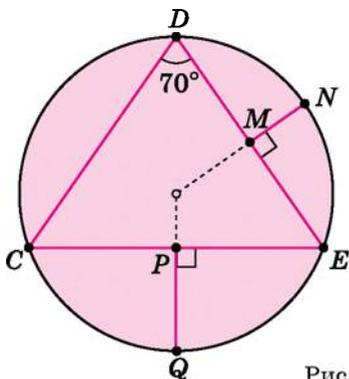


Рис. 447

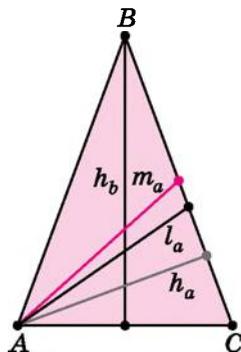


Рис. 448

1049. Пусть a , b — стороны BC и AC равнобедренного треугольника ABC , S — площадь треугольника, h_a , l_a , m_a — высота, биссектриса, медиана, проведенные из вершины A , h_b — высота, проведенная из вершины B (рис. 448). Найдите недостающие числа в таблице.

	a	b	A	B	S	h_a	l_a	m_a	h_b
а)	657	452							
б)	231		39°						
в)	777			72°					
г)	235				513				
д)	764					503			
е)	432						331		
ж)	237							106	
з)	208								100
и)		438	48°						

	a	b	A	B	S	h_a	l_a	m_a	h_b
к)		992		75°					
л)		543			676				
м)		12,8				10,1			
н)		2,36					1,75		
о)		9,96						4,36	
п)		7,82							4,09
р)			56°		23,8				
с)			63°			67,8			
т)			18°				5,52		
у)			70°					4,39	
ф)			63°						4,56

1050. Меньшее основание трапеции равно 54 мм, высота — 60 мм, а углы при большем основании составляют 45° и 20° . Найдите большее основание и боковые стороны трапеции.

1051. Найдите площадь ромба, угол которого равен 44° , а расстояние между сторонами — 25 см.

1052. На рисунке 449 показано, как можно определить расстояние PQ между двумя точками P и Q , одна из которых недоступна. Найдите это расстояние, если $PR = 120$ м, а $\angle RPQ = 49^\circ$.

1053. На рисунке 450 показано, как можно определить ширину NP реки. Определите эту ширину, если $LK = 40$ м, $\angle MLP = 10^\circ$, $\angle MLN = 15^\circ$.

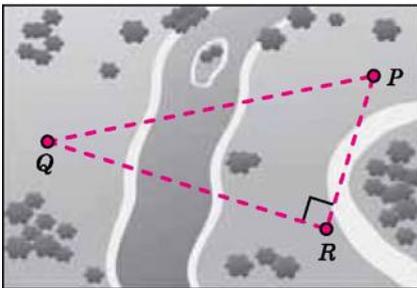


Рис. 449

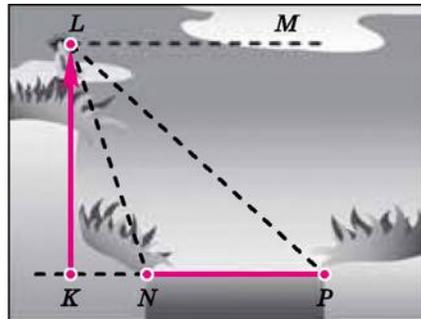


Рис. 450

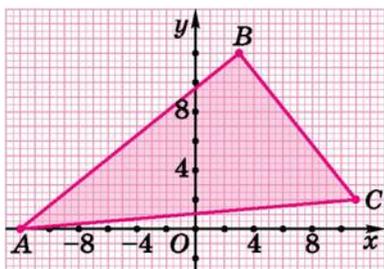


Рис. 451

1054. Треугольник ABC задан координатами своих вершин (рис. 451). Найдите:

- а) стороны треугольника;
- б) площадь треугольника;
- в) высоты треугольника;
- г) медианы треугольника;
- д) углы треугольника;
- е) биссектрисы треугольника;

ж) уравнения прямых, проходящих через стороны треугольника;

з) уравнения прямых, содержащих средние линии треугольника.

1055. В забеге на 800 м первый спортсмен опередил второго на $11\frac{1}{9}$ с. В новом забеге на эту же дистанцию первый спортсмен уменьшил скорость на 0,8 м/с, а второй на столько же увеличил. В результате теперь второй спортсмен опередил первого на $11\frac{1}{9}$ с. Найдите скорости спортсменов в каждом забеге.

1056. Равнодействующая двух сил, направленных друг к другу под углом 60° , равна 70 кН. Если бы эти силы действовали по одной прямой и в одном направлении, то их равнодействующая увеличилась бы на 10 кН. Найдите эти силы.

1057. Найдите стороны прямоугольного треугольника, учитывая, что его периметр равен 144 м, а площадь — 504 м^2 .

1058. Разложите на множители многочлен:

- а) $x^4 + x^2 - 2$;
- б) $z^4 - 3z^2 - 4$;
- в) $9a^4 + 8a^2 - 1$;
- г) $20b^4 - b^2 - 1$.

1059. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

- а) $y = x^2$ и $y = 6 - x$;
- б) $z = y^2$ и $z = 6 + y$.

1060. Сравнив значения функций $y = x^2$ и $y = x^2 - 4$ при одинаковых значениях аргументов, расскажите, как постро-

ить график функции $y = x^2 - 4$, если можно пользоваться шаблоном параболы $y = x^2$.

1061. Составьте таблицы значений функций $y = x^2$ и $y = (x - 1)^2$. Сравните значения аргументов при одинаковых значениях функций и расскажите, как построить график функции $y = (x - 1)^2$, если можно пользоваться шаблоном параболы $y = x^2$.

1062. Основания трапеции равны 5 см и 7 см, а высота — 3 см. Найдите сторону квадрата, площадь которого в два раза больше площади трапеции.

1063. Одна сторона параллелограмма равна 12 см, а проведенная к ней высота — 3 см. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади параллелограмма.

* * *

1064. Через вершину треугольника проведите прямую так, чтобы сумма расстояний до нее от вершин треугольника была наибольшей.

1065. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL . Точка K на стороне AC выбрана так, что $\angle CLK = \angle BAC$. Докажите, что $LK = LB$.

1066. Докажите, что квадратное уравнение с нечетными коэффициентами не имеет рациональных корней.

Материал для повторения

Числа и вычисления

Числа изучаются в разделе математики, называемом *арифметикой*. В арифметике рассматриваются именование чисел на языке десятичной позиционной системы счисления, действия над числами, отношения между ними, числовые выражения.

Основой арифметики являются *натуральные числа*, с помощью которых определяется *количество предметов* того или иного множества:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

Все натуральные числа вместе составляют *множество натуральных чисел*, которое обозначают N .

Во множестве натуральных чисел всегда выполнимы действия *сложения* и *умножения*, но действие *вычитания*, с помощью которого находят неизвестное слагаемое по известной сумме и другому слагаемому, выполнимо не всегда. Например, разность $7 - 10$ во множестве натуральных чисел не имеет значения.

Если к натуральным числам присоединить противоположные им числа $-1, -2, -3, \dots$ и число 0 , то получится *множество целых чисел*, которое обозначают Z .

Во множестве целых чисел всегда выполнимы действия *сложения*, *вычитания* и *умножения*, но действие *деления*, с помощью которого находят неизвестный множитель по известному произведению и другому множителю, остается не всегда выполнимым. Например, частное $7 : 10$ во множестве целых чисел не имеет значения.

Если имеется такое целое число c , что истинно равенство $a = b \cdot c$, то говорят, что целое число a *делится* на целое число b , или, иначе, число a *кратно* числу b , или что число b является *делителем* числа a . Натуральное число, имеющее точно два разных натуральных делителя, называется *простым*

числом, а число, имеющее более двух разных натуральных делителей, называется *составным числом*. Число 1 не является простым и не является составным. Каждое натуральное число однозначно представляется произведением простых множителей, если не учитывать порядок их записи.

Число, делящееся на 2, называется *четным числом*, а не делящееся, — *нечетным числом*. Цифры 0, 2, 4, 6, 8 называются *четными*, а цифры 1, 3, 5, 7, 9 — *нечетными*.

Укажем свойства чисел, которые делятся на некоторые натуральные числа n .

Если число делится на:

- 2, то оно оканчивается четной цифрой;
- 5, то оно оканчивается цифрой 0 или цифрой 5;
- 3, то сумма его цифр делится на 3;
- 9, то сумма его цифр делится на 9.

Сформулируем признаки делимости на некоторые натуральные числа.

Число делится на:

- 2, если оно оканчивается четной цифрой;
- 5, если оно оканчивается цифрой 0 или цифрой 5;
- 3, если сумма его цифр делится на 3;
- 9, если сумма его цифр делится на 9.

Наибольшее из чисел, на которые делятся данные числа, называется *наибольшим общим делителем* (НОД) этих чисел. Например, НОД ($2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$) = $2^2 \cdot 5$.

Наименьшее из чисел, делящихся на все данные числа, называется *наименьшим общим кратным* (НОК) этих чисел. Например, НОК ($2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$) = $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Если к целым числам присоединить дробные числа, т. е. числа вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число, то получится *множество рациональных чисел*, которое обозначают Q . Во множестве рациональных чисел всегда выполняемы действия сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на 0).

Каждое рациональное число можно единственным способом представить обыкновенной несократимой дробью $\frac{m}{n}$ с целым числителем m и натуральным знаменателем n . Рациональные числа можно представлять и десятичными дробя-

ми, конечными или бесконечными периодическими. Если не использовать бесконечные десятичные дроби с периодом 9, то такое представление также однозначно.

Обыкновенную дробь можно преобразовать в десятичную делением числителя на знаменатель. При этом полученная десятичная дробь будет конечной или бесконечной периодической без предпериода или с предпериодом:

$$\frac{17}{40} = 0,425; \quad \frac{27}{87} = 0,(729); \quad \frac{101}{74} = 1,3(648).$$

Чтобы конечную десятичную дробь преобразовать в обыкновенную, можно записать дробь с числителем, равным дробной части десятичной дроби, и знаменателем, равным разрядной единице со столькими нулями, сколько имеется цифр в дробной части десятичной дроби, и затем сократить полученную обыкновенную дробь:

$$0,175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}.$$

В параграфе 10 сформулированы правила преобразования бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь.

Некоторые часто употребительные дроби-доли имеют специальные названия. Сотая доля называется *процентом*, а тысячная — *промилле*. Процент обозначают знаком %, а промилле — знаком ‰ :

$$1 \% = \frac{1}{100} = 0,01; \quad 71 \% = \frac{71}{100} = 0,71;$$
$$1 ‰ = \frac{1}{1000} = 0,001; \quad 71 ‰ = \frac{71}{1000} = 0,071.$$

Числа, представляющиеся десятичными дробями, конечными или бесконечными, вместе составляют множество действительных чисел, которое обозначают R . Множества действительных чисел и точек координатной прямой связаны взаимно однозначным соответствием. При этом расстояние от числа a до начала координат называется *модулем числа a* . Полезно знать, что выражение $|a - b|$ представляет расстояние между числами a и b на координатной прямой.

Действительное число, не являющееся рациональным, называется *иррациональным*. Результаты действий извлечения корня, нахождения значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса, за редким исключением, являются иррациональными числами:

$\sqrt{5} = 2,2360679774 \dots$; $\sin 5^\circ = 0,087\ 155\ 742\ 747\dots$;
 $\cos 2^\circ = 0,999\ 390\ 827\dots$; $\operatorname{tg} 125^\circ = -1,428\ 148\ 006\dots$.

Иррациональным является и известное вам число π :

$$\pi = 3,141592653589793238462643383279\dots$$

Степень числа вводится следующим определением:

$$a^0 = 1, \text{ если } a \neq 0;$$

$$a^1 = a;$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n, \text{ если } n \text{ — натуральное число и } n > 1;$$

n множителей

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ если } a \neq 0, n \text{ — натуральное число и } n \geq 1.$$

Квадратным корнем \sqrt{a} из числа a называется такое число x , что $x^2 = a$.

Средним арифметическим \bar{a} чисел a_1 и a_2, \dots, a_n называется их сумма, разделенная на количество n :

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Средним геометрическим g двух положительных чисел a_1, a_2 называется корень квадратный из их произведения:

$$g = \sqrt{a_1 \cdot a_2}.$$

1067. Найдите значение выражения:

- а) $((3 + 7) - (2 - 1)) \cdot (5 - 3)$; г) $14\ 700 : 21 : 7 \cdot 20$;
б) $((3 + 7 - 2) - 1) \cdot 5 - 3$; д) $14\ 700 : (21 : 7) \cdot 20$;
в) $((3 + 9 - 5) \cdot (4 - 2)) : (19 - 5)$; е) $14\ 700 : (21 : 7 \cdot 20)$.

1068. Найдите значение выражения:

- а) $((7 + 10) - (12 - 9))((15 - 5) : (19 - 14))$;
б) $((9 + 8) \cdot 3 - 25) : ((11 - 8) \cdot 8 - (22 - 11))$;
в) $((18 : 9) + (35 : 7) + (116 : 29)) : (40 - 29)$;
г) $((98 : 7) : (217 : 31)) : (456 : 57)$;
д) $((131 - 6) : (75 : 3)) + (152 - 41) : 37$;
е) $(1040 : 26 : 4) + (100 : (20 : 5)) : 25$;
ж) $200 - (20 + (49 - (22 - 15)) : 7)$;
з) $((1000 : 2) - (36 \cdot 15 - (140 : 7) \cdot 5)) : (213 - 17 \cdot 11 - 140 : 5 \cdot 7)$;
и) $((336 : 7) + 5 - 4) + (336 : (7 + 5) - 4) + (336 : (7 + 5 - 4))$.

1069. Найдите значение выражения:

- а) $((3 - 7) + (2 - 11)) \cdot (5 - 13)$; г) $-14\,700 : 21 : (-7) \cdot 20$;
б) $((3 - 7 + 2) - 11) \cdot 5 - 13$; д) $-14\,700 : (21 : (-7)) \cdot 20$;
в) $((3 + 9 - 25) \cdot (4 - 12)) : (19 - 15)$; е) $-14\,700 : (21 : (-7) \cdot 20)$.

1070. Разложите на простые множители число:

- а) 420; б) 4950; в) 36 750; г) 55 055.

1071. Из чисел 865, 1551, 1665, 1755, 1881, 2112, 2240, 2442, 2552, 2772, 4480, 6185, 11 270, 32 750 выпишите те, которые делятся на:

- а) 2; в) 4; д) 6; ж) 9; и) 15;
б) 3; г) 5; е) 8; з) 10; к) 40.

1072. Найдите НОД и НОК чисел:

- а) 36 и 54; в) 18, 54 и 78;
б) 168 и 360; г) 102, 510 и 3570.

1073. Найдите:

- а) наименьшее натуральное число, которое при делении на 12, 18 и 54 дает в остатке 2;
б) наименьшее натуральное число, делящееся на 5, а при делении на 2, 3 и 7 дающее в остатке 1;
в) двузначное число, при делении которого на сумму цифр в частном получается 3 и в остатке 5.

1074. Представьте десятичной дробью число:

- а) $\frac{17}{25}$; в) $\frac{17}{111}$; д) $\frac{17}{195}$;
б) $\frac{17}{8}$; г) $\frac{17}{70}$; е) $\frac{17}{1443}$.

1075. Запишите обыкновенной дробью число:

- а) 0,(54); в) 1,(472); д) 0,1(12);
б) 0,2(27); г) 11,0(285714); е) 9,2(42).

1076. Найдите:

- а) $\frac{2}{7}$ числа 21;
б) число, $\frac{2}{7}$ которого составляют 12;

- в) какую часть число 14 составляет от числа 49;
 г) во сколько раз число 49 больше числа 21;
 д) 15 % числа 150;
 е) число, 15 % которого составляют 42;
 ж) сколько процентов число 56 составляет от числа 280;
 з) сколько процентов число 280 составляет от числа 56.

1077. Выполните сложение:

- а) $\frac{3}{8} + \frac{1}{4}$; в) $\frac{7}{20} + \frac{1}{4}$; д) $\frac{27}{40} + \frac{3}{8}$;
 б) $\frac{7}{12} + \frac{1}{6}$; г) $\frac{11}{24} + \frac{5}{8}$; е) $\frac{29}{36} + \frac{7}{12}$.

1078. Выполните действие:

- а) $\frac{1}{12} + \frac{7}{8}$; в) $\frac{11}{36} - \frac{3}{8}$; д) $\frac{13}{24} - \frac{7}{18}$;
 б) $\frac{5}{12} + \frac{3}{8}$; г) $\frac{17}{18} - \frac{7}{12}$; е) $\frac{20}{21} - \frac{13}{14}$.

1079. Выполните вычитание:

- а) $1\frac{5}{9} - \frac{2}{3}$; в) $1\frac{2}{35} - \frac{5}{14}$; д) $5\frac{3}{16} - \frac{11}{20}$;
 б) $1\frac{4}{15} - \frac{3}{5}$; г) $2\frac{2}{15} - \frac{13}{20}$; е) $4\frac{7}{40} - \frac{19}{60}$.

1080. Выполните вычитание:

- а) $\frac{7}{15} - \frac{5}{6}$; в) $\frac{5}{6} - 1\frac{1}{15}$; д) $\frac{17}{28} - \frac{16}{21}$;
 б) $\frac{9}{20} - \frac{7}{12}$; г) $\frac{9}{10} - 1\frac{1}{3}$; е) $\frac{17}{45} - \frac{11}{18}$.

1081. Выполните сложение:

- а) $\frac{1}{5} + 0,35$; в) $\frac{7}{20} + 0,65$; д) $\frac{5}{8} + 1,025$;
 б) $\frac{3}{4} + 0,28$; г) $\frac{11}{25} + 0,56$; е) $\frac{7}{40} + 0,225$.

1082. Выполните вычитание:

- а) $\frac{5}{6} - 0,7$; в) $\frac{2}{7} - 0,3$; д) $0,6 - \frac{7}{12}$;
 б) $\frac{2}{3} - 0,6$; г) $0,8 - \frac{5}{7}$; е) $0,4 - \frac{9}{35}$.

1083. Выполните вычитание:

- а) $2,25 - 1\frac{1}{6}$; в) $3\frac{1}{3} - 2,9$; д) $4\frac{5}{6} - 1,8$;
 б) $1,75 - 1\frac{2}{3}$; г) $2\frac{1}{9} - 2,1$; е) $1,7 - \frac{7}{9}$.

1084. Выполните вычитание:

- а) $\frac{1}{15} - 0,15$; в) $\frac{11}{35} - 0,35$; д) $\frac{17}{24} - 0,95$;
б) $\frac{4}{45} - 0,45$; г) $\frac{7}{12} - 0,85$; е) $0,72 - \frac{11}{12}$.

1085. Найдите произведение:

- а) $1\frac{1}{15} \cdot 1\frac{1}{4}$; в) $3\frac{1}{16} \cdot 2\frac{2}{21}$; д) $2\frac{1}{32} \cdot \frac{1}{13}$;
б) $2\frac{18}{18} \cdot 1\frac{2}{7}$; г) $4\frac{1}{21} \cdot 2\frac{1}{17}$; е) $5\frac{1}{24} \cdot 1\frac{17}{55}$.

1086. Найдите произведение:

- а) $0,27 \cdot 2\frac{7}{9}$; в) $1\frac{1}{39} \cdot 1,3$; д) $0,72 \cdot 3\frac{19}{27}$;
б) $0,45 \cdot 1\frac{7}{9}$; г) $0,63 \cdot 1\frac{1}{9}$; е) $0,0216 \cdot 3\frac{19}{27}$.

1087. Найдите частное:

- а) $1,75 : 1\frac{1}{7}$; в) $1,44 : 1\frac{1}{35}$; д) $32,4 : 2\frac{2}{35}$;
б) $-2,25 : \frac{9}{18}$; г) $2,16 : 1\frac{17}{55}$; е) $4,32 : 3\frac{8}{35}$.

1088. Найдите частное:

- а) $\frac{7}{75} : 0,21$; в) $-1,96 : 1\frac{19}{30}$; д) $-3,24 : (-1\frac{1}{25})$;
б) $\frac{11}{15} : (-0,44)$; г) $2,52 : (-2\frac{1}{40})$; е) $-6,76 : 2\frac{9}{80}$.

1089. Найдите значение выражения:

- а) $(0,12 - \frac{7}{60}) \cdot 0,3 - 0,1$; г) $2,2 + 0,88 : (2\frac{5}{12} - 3,15)$;
б) $(0,48 - \frac{7}{15}) \cdot 2,5 + 0,3$; д) $(1\frac{7}{60} - 1,35) \cdot 0,7 + 1,02$;
в) $0,08 + 0,132 : (1\frac{5}{18} - 1,4)$; е) $(\frac{7}{45} - 0,24) \cdot 0,45 - 0,062$.

1090. Найдите значение выражения:

- а) $1 - 0,15 : (\frac{11}{12} - 0,75)$; г) $(2,45 - 1\frac{17}{30}) \cdot 0,09 - 0,007$;
б) $0,2 - 0,13 : (0,44 + \frac{1}{8})$; д) $1,2 + 0,052 : (0,24 - \frac{7}{40})$;
в) $(1,8 - \frac{17}{18}) \cdot \frac{9}{22} + 0,15$; е) $0,35 + 0,014 : (0,28 - \frac{14}{55})$.

1091. Найдите значение выражения:

- а) $\frac{6,75^2 + 0,125 \cdot 67,5}{5,9^2 - (1,03 + 1,89726 : 0,618)^2}$;
- б) $\frac{3,05^2 - 2,55^2}{0,35 \cdot 388 - 28,8 \cdot (20,56 - 14,501 : 0,85)}$;
- в) $\frac{((5,2^2 : 2,6 + 8,1)^2 - 6,5^2) : 0,025}{(60,192 : 2,4 - 1,08)^2 - 0,24 \cdot 1400}$;
- г) $\frac{(81,624 : 4,8 - 4,505)^2 + 125 \cdot 0,75}{((0,44^2 : 0,88 + 3,53)^2 - 2,75^2) : 0,52}$.

1092. Найдите значение выражения:

- а) $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - 1 : 1\frac{1}{9}$;
- б) $2 : \frac{3}{5} + \frac{3}{5} : 2 = 1\frac{1}{2} : 6 + 6 : 1\frac{1}{2}$;
- в) $2\frac{3}{4} : (1\frac{1}{2} - \frac{2}{5}) + (\frac{3}{4} - \frac{5}{6}) : 3\frac{1}{6}$;
- г) $(\frac{2}{15} + 1\frac{7}{12}) : \frac{30}{103} - (1 : 2\frac{1}{4}) \cdot \frac{9}{16}$;
- д) $(3\frac{1}{2} : 4\frac{2}{3} + 4\frac{2}{3} : 3\frac{1}{2}) \cdot 4\frac{4}{5}$;
- е) $3\frac{3}{7} \cdot 3\frac{1}{2} : (1\frac{1}{11} - \frac{27}{55})$;
- ж) $3\frac{1}{3} : ((4\frac{5}{12} - 3\frac{13}{24}) \cdot \frac{4}{7} + (3\frac{1}{18} - 2\frac{7}{12}) \cdot 1\frac{10}{17})$;
- з) $(2\frac{1}{2} : 10 + 10 : 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{6}) \cdot \frac{36}{125}$;
- и) $(\frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{12}) : (\frac{2}{15} + \frac{1}{10} + \frac{47}{90}) \cdot (4\frac{1}{15} - 3\frac{2}{3})$;
- к) $(3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{4} \cdot \frac{32}{81}) : (2\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{11} : \frac{75}{154})$.

1093. Сравните кратко значения выражений:

- а) $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} : \frac{9}{10} + \frac{3}{4} : (\frac{5}{6} : 2\frac{2}{9})$ и $(10 : 2\frac{2}{3} + 7\frac{1}{2} : 10) \cdot (\frac{3}{40} + \frac{7}{12} - 197 : 360)$;
- б) $((15 : 3\frac{3}{4}) - 10\frac{1}{2} : 1\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{14}) : (1\frac{23}{52} - 1\frac{1}{4})$ и $1\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4} : (8\frac{3}{4} : 1\frac{1}{6}) \cdot 22$;
- в) $\frac{5\frac{1}{2} + 1\frac{4}{7}}{5\frac{1}{2} - 1\frac{4}{7}} : \frac{1\frac{1}{7} + \frac{4}{21}}{1\frac{1}{7} - \frac{4}{21}} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{19}$ и $\frac{3\frac{2}{3} + 1\frac{4}{7}}{3\frac{2}{3} - 1\frac{4}{7}} : \frac{13\frac{1}{3} - 3\frac{1}{13}}{13\frac{1}{3} + 3\frac{1}{13}} ; \frac{5\frac{1}{2} + 1\frac{3}{8}}{5\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3}} : \frac{2}{3}$;
- г) $\frac{3\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4} : 2\frac{1}{2} + (1\frac{1}{7} - \frac{23}{49}) : \frac{22}{147}}{2 : 3\frac{1}{5} + 3\frac{1}{4} : 13 : \frac{2}{3} - (2\frac{5}{18} - \frac{17}{36}) \cdot \frac{18}{65}}$ и $\frac{15 : \frac{5}{18} : 3\frac{3}{8} \cdot (\frac{1}{16} + \frac{11}{36} + \frac{5}{48} + \frac{5}{18})}{(11\frac{5}{11} - 8\frac{21}{22}) : 1\frac{2}{3}}$.

1094. Упорядочьте по возрастанию числа:

- а) $\frac{28}{23}$, $\frac{41}{53}$, $\frac{4}{5}$; в) $\frac{37}{47}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{42}{37}$;
б) $\frac{37}{57}$, $\frac{62}{53}$, $\frac{6}{5}$; г) $\frac{5}{6}$, $\frac{43}{39}$, $\frac{49}{61}$.

1095. Упорядочьте по убыванию выражения:

- а) $\frac{1}{2}$, $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$, $\left(\frac{3}{2}\right)^2$, $\left(-1\frac{1}{8}\right)^3$; в) $\frac{1}{8}$, $\left(-1\frac{1}{4}\right)^3$, $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$, $\left(\frac{4}{3}\right)^2$;
б) $\left(-\frac{1}{8}\right)^3$, $\left(-1\frac{1}{2}\right)^3$, $\frac{1}{5}$, $\left(\frac{5}{4}\right)^2$; г) $\left(-1\frac{2}{3}\right)^3$, $\frac{5}{8}$, $\left(-\frac{3}{7}\right)^3$, $\left(\frac{7}{6}\right)^2$.

1096. Определите, в каких пределах находятся значения выражения:

- а) $5a - 3b$, учитывая, что $3,2 < a < 3,4$ и $0,7 < b < 0,8$;
б) $-2m - n$, учитывая, что $-2,8 < m < -2,7$ и $5,2 < n < 5,3$;
в) $-4c + 5d$, учитывая, что $4,1 < c < 4,2$ и $1,8 < d < 1,9$;
г) $3p - 2q$, учитывая, что $2,3 < p < 2,4$ и $-1,7 < q < -1,8$.

1097. Определите, в каких пределах находятся значения периметра P и площади S прямоугольника, учитывая, что его стороны, измеренные с точностью до:

- а) сантиметра, равны 74 см и 53 см;
б) миллиметра, равны 59 мм и 91 мм;
в) дециметра, равны 16 дм и 29 дм;
г) метра, равны 34 м и 56 м.

1098. Определите, какие четные числа находятся на промежутке:

- а) $(-2,3; 7]$; б) $[-5; 4,2)$; в) $(-4; 5,8)$; г) $[-3,3; 4]$.

1099. Укажите наибольшее и наименьшее целые числа, которые принадлежат промежутку:

- а) $(-3; 7]$; б) $[-5; 4)$; в) $(-4; 5)$; г) $[-3; 4]$.

1100. Упростите:

- а) $\left(2\sqrt{6} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{8}\right) \cdot 3\sqrt{6}$;
б) $(2 - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{7 - 3\sqrt{5}}$;
в) $\sqrt{63} - 3\sqrt{1,75} - 0,5\sqrt{343} + \sqrt{112}$;
г) $(3 - \sqrt{5})^2 - 6\sqrt{14} - 6\sqrt{5}$;
д) $\sqrt{\frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{8} - \sqrt{2}} + \sqrt{6}}$; е) $\frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$.

1101. Упростите:

а) $\frac{1}{2+\sqrt{5}} - \frac{1}{3+\sqrt{7}} + \frac{3}{1-\sqrt{7}} - \frac{15}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{5}$;

б) $\frac{1}{1+\sqrt{7-2\sqrt{6}}} + \frac{1}{1-\sqrt{7+2\sqrt{6}}}$;

в) $\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{2}{3+\sqrt{10}}$;

г) $\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$;

д) $\frac{2}{5-\sqrt{10}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right)$;

е) $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

1102. Сравните числа:

а) $5\sqrt{3}$ и $4\sqrt{5}$;

в) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ и $2-\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ и $\sqrt{2}+\sqrt{6}$;

г) $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ и $\frac{8-2\sqrt{7}}{9}$.

1103. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}$;

б) $\frac{5}{\sqrt{13}-3}$;

в) $\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

г) $\frac{2}{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$.

1104. Упростите выражение:

а) $\frac{9}{5-\sqrt{7}} + \frac{22}{7+\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$;

б) $\left(\frac{16}{\sqrt{5}-1} - \frac{5}{\sqrt{3}+2} - \frac{8}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right) \cdot (\sqrt{3}+6)$;

в) $(\sqrt{15}+4)(\sqrt{10}-\sqrt{6}) \cdot \sqrt{4-\sqrt{15}}$;

г) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\sqrt{3}}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\sqrt{3}}+1}$.

1105. Найдите среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел:

а) 2 и 8;

в) 9 и 16;

д) 4, 6 и 9;

ж) 2, 3, 8 и 27;

б) 5 и 20;

г) 5 и 45;

е) 4, 10 и 25;

з) 1, 4, 9 и 36.

1106. Найдите значение выражения:

а) $\sin 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$;

б) $\operatorname{ctg} 45^\circ - \operatorname{ctg} 150^\circ \cdot \sin 120^\circ$;

в) $\operatorname{tg} 135^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 135^\circ$;

г) $\operatorname{tg} 120^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot \cos 150^\circ$;

- д) $\sin 90^\circ \cdot \cos 120^\circ + \cos 90^\circ \cdot \operatorname{ctg} 150^\circ$;
 е) $\operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 180^\circ + \cos 35^\circ \cdot \cos 90^\circ$.

1107. Найдите значение выражения:

- а) $\frac{\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \cos 45^\circ}{\sin 135^\circ \cdot \operatorname{ctg} 150^\circ}$; г) $\frac{\sin 120^\circ \cdot \cos 68^\circ \cdot \operatorname{ctg} 90^\circ}{\cos 68^\circ \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ}$;
 б) $\frac{\cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ}{\operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{ctg} 35^\circ}$; д) $\frac{\operatorname{ctg} 134^\circ \cdot \sin 65^\circ}{\sin 115^\circ \cdot \operatorname{ctg} 46^\circ \cdot \cos 60^\circ}$;
 в) $\frac{\operatorname{tg} 56^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 180^\circ}{\sin 150^\circ \cdot \operatorname{ctg} 34^\circ}$; е) $\frac{\operatorname{tg} 34^\circ \cdot \cos 37^\circ \cdot \operatorname{ctg} 34^\circ}{\sin 135^\circ \cdot \sin 53^\circ}$.

Выражения и их преобразования

В предыдущем параграфе мы находили значения *числовых выражений*, которые образуются из чисел с помощью действий. Мы уже знаем действия сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень, извлечения корня, нахождения значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса. Знаем также, что на множестве действительных чисел действия сложения, вычитания, умножения, возведения в натуральную степень, нахождения значений синуса и косинуса всегда выполнимы, а остальные имеют некоторые ограничения.

Если при образовании выражения с помощью названных действий, кроме чисел, использовать еще и переменные, то образуются *выражения с переменными*, которые изучаются в разделе математики, названном *алгеброй*.

Особенностью переменной является то, что она принимает разные значения из некоторого множества. В алгебре таким множеством является множество действительных чисел. Чтобы задать *переменную*, надо для нее выбрать имя — некоторую букву — и указать множество, из которого она принимает свои значения. Если это множество не указано, то подразумевается множество действительных чисел или та его часть, на которой данное выражение имеет значения. Например, для выражения $\sqrt{x-2}$ такое множество находится из условия $x-2 \geq 0$, поскольку если это условие не истинно, то данное выражение не имеет значений.

Будем образовывать выражение с переменными с помощью только тех действий, которые всегда выполнимы, т. е. с помощью действий сложения, вычитания, умножения, возведения в натуральную степень и деления на число, которое не равно нулю. Такие выражения называют *целыми выражениями*.

Присоединим к тем действиям, которые используются при образовании целых выражений, еще одно действие — деление. Выражения, которые при этом образуются, называются *дробно-рациональными выражениями*. Целые выражения вместе с дробно-рациональными выражениями составляют множество *рациональных выражений*.

Присоединим к действиям, которые используются при образовании рациональных выражений, действие извлечения корня. Выражения, которые при этом образуются, называются *иррациональными выражениями*. Рациональные выражения вместе с дробно-рациональными выражениями составляют множество *алгебраических выражений*.

Действия, с помощью которых образуются алгебраические выражения, называют *алгебраическими действиями*. Действия нахождения значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса относят к *трансцендентным действиям*.

Разделение выражений на указанные тут классы показывает схема, приведенная на рисунке 452.

Если в выражение с переменными подставить вместо каждой переменной какое-нибудь ее значение, то получится числовое выражение, значение которого называют *значением выражения с переменными* при выбранных значениях пере-

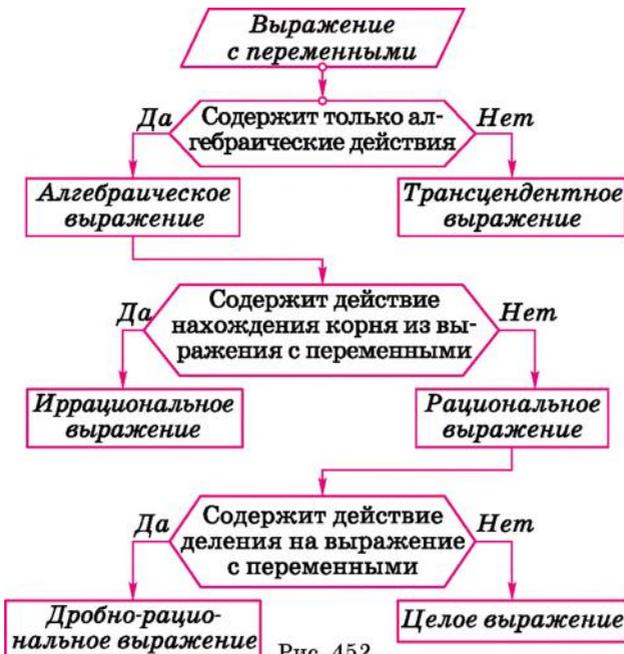


Рис. 452

менных. Множество наборов значений переменных, при которых выражение с переменными имеет значения, называют *областью определения выражения*. Например, значением выражения $\frac{12}{\sqrt{a+8}}$ при $a = 17$ является число 2,4, а областью его определения — множество $(-8; +\infty)$.

Два выражения называются *тождественно равными*, если при всех наборах значений переменных из областей определения обоих выражений, соответствующие значения выражений равны. Замена выражения тождественно равным ему выражением называется *тождественным преобразованием* этого выражения.

При тождественных преобразованиях выражения используют свойства действий, с помощью которых образовано это выражение.

Сложение и *умножение* имеют переместительное и сочетательное свойства, а *умножение* — распределительное свойство относительно сложения:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a; & a \cdot b &= b \cdot a; \\ a + (b + c) &= (a + b) + c; & a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c; \\ & & a \cdot (b + c) &= ab + ac. \end{aligned}$$

На распределительном свойстве основываются тождественные преобразования (раскрытие скобок и вынесение общего множителя за скобки):

- *раскрытием скобок* называется замена выражений $a(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$ и $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)b$ выражениями $ab_1 + ab_2 + \dots + ab_n$ и $a_1b + a_2b + \dots + a_nb$ соответственно;

- *вынесением общего множителя за скобки* называется замена выражений $ab_1 + ab_2 + \dots + ab_n$ и $a_1b + a_2b + \dots + a_nb$ выражениями $a(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$ и $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)b$ соответственно.

Частным случаем вынесения общего множителя за скобки является *приведение подобных слагаемых*, т. е. замена суммы подобных слагаемых тождественно равным ей одним слагаемым.

Тождество $a - b = a + (-b)$ позволяет выражение, образованное из других выражений с помощью сложения и вычитания, записать как сумму, которая называется *алгебраической суммой*.

Свойства сложения и умножения дают возможность обосновать формулы сокращенного умножения:

$$\begin{aligned} (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2; \\ (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3; \\ (a - b)(a + b) &= a^2 - b^2; \\ (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) &= a^3 \pm b^3. \end{aligned}$$

Действие *возведения в степень* имеет такие свойства:

$$a^m a^n = a^{m+n}; a^m : a^n = a^{m-n}; (a^m)^n = a^{mn};$$

$$(ab)^m = a^m b^m; \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Действие *извлечения квадратного корня* имеет такие свойства:

$$\sqrt{a^2} = |a|; \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \text{ и } b \geq 0); \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0).$$

Свойства действий *нахождения значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса* выражают:

- основные тригонометрические тождества:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha};$$

- формулы приведения:

$$\sin(90^\circ \pm \alpha) = \cos \alpha;$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$\cos(90^\circ \pm \alpha) = \mp \sin \alpha;$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ \pm \alpha) = \mp \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ \pm \alpha) = \mp \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Любое целое выражение представляется *многочленом стандартного вида*, т. е. суммой одночленов стандартного вида. *Одночленом стандартного вида* называют произведение числа и степеней разных переменных.

Обратное преобразование — представление многочлена стандартного вида произведением нескольких множителей — называют *разложением многочлена на множители*.

При разложении многочлена на множители используют вынесение общего множителя за скобки, группировку, формулы сокращенного умножения.

Среди целых выражений выделяется *квадратный трехчлен*, т. е. выражение вида $ax^2 + bx + c$, где a, b, c — некоторые числа, x — переменная, причем $a \neq 0$.

Значения переменной x , при которых квадратный трехчлен имеет своим значением число 0, называются *корнями квадратного трехчлена*.

Выражение $b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом квадратного трехчлена* и обозначают D , т. е.

$$D = b^2 - 4ac.$$

Если $D > 0$, то квадратный трехчлен имеет два корня x_1 и x_2 , которые через его коэффициенты выражаются следующим образом:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D = 0$, то квадратный трехчлен имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$.

Если $D < 0$, то квадратный трехчлен не имеет корней.

Связь между корнями квадратного трехчлена и его коэффициентами выражает *теорема Виета*: если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ и } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Теорема, обратная теореме Виета, указывает условия, при которых два числа являются корнями квадратного трехчлена: если числа a , b , c , x_1 и x_2 удовлетворяют условиям $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, то x_1 и x_2 являются корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Найдя корни квадратного трехчлена, можно представить его произведением линейных множителей: если x_1 и x_2 являются корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то истинно равенство $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Любое рациональное выражение представляется рациональной дробью или многочленом, при этом под *рациональной дробью* понимают дробь, числитель и знаменатель которой являются многочленами стандартного вида.

1108. Многочленом стандартного вида представьте выражение:

- а) $(x + y)(x - y + 1) - (x - y)(x + y - 1)$;
- б) $(m + 3n)(m + n + 2) - (m + n)(m + n + 2)$;
- в) $(b - 1)^3 + 3(b - 1)^2 + 3(b - 1) + 1$;
- г) $(l^2 + lk + k^2)(l^2 - lk + k^2)(l^4 - l^2k^2 + k^4)$;
- д) $(r^2 - 3r + 1)(2r + 1)^2$;
- е) $(2a + 3)(a - 2)^3$;
- ж) $(c + 1)^4 + (c - 1)^4$;
- з) $(d - 2)(d^4 + 2d^3 + 4d^2 + 8d + 16)$;
- и) $(2x + y)^3 - (x - y)^2(8x + y) + 6xy^2$;
- к) $(m - 2n)^3 - (m + n)^2(m - 8n) - 6m^2n$;
- л) $(2a - b)^3 - (a + b)^2(8a - b) - 6ab^2$;
- м) $(p + 2q)^3 - (p - q)^2(p + 8q) + 6p^2q$.

1109. Докажите, что при всех значениях переменных значение выражения:

- а) $(e + 2)^2 + 1 - 2(e + 2)$ неотрицательно;
б) $(h - 4)^2 - (h + 3)^2 + 7(2h + 1)$ положительно;
в) $9 + (f - g)(f - g - 6)$ неотрицательно;
г) $(2p - 3)^3 - (3p + 2)^3 + 19p^2(p + 1) - 18(p - 1)$ отрицательно.

1110. Найдите числовое значение выражения:

- а) $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$ при $a = -3$ и $b = 2\frac{1}{2}$;
б) $27i^3 - 108i^2j + 144lj^2 - 64j^3$ при $i = 1\frac{2}{3}$ и $j = 1\frac{1}{4}$.

1111. Разложите на множители многочлен:

- а) $ax^2 + bx^2 + ax - cx^2 + bx - cx$;
б) $ax^2 - bx^2 - bx + ax - a + b$;
в) $x^2 - cx - 2xy + 2cy$;
г) $2a^2 - 2ab + 3ax - 3bx$.

1112. Разложите на множители многочлен:

- | | |
|--|--------------------------------|
| а) $(2a - 3)^2 - (a + 2)^2$; | ж) $x^3 - ax^2 - a^2x + a^3$; |
| б) $(3x + 2y)^2 - (x - y)^2$; | з) $a^3 + a^2x - ax^2 - x^3$; |
| в) $x^2 + cx - 2xy - 2cy$; | и) $x^2 - 2cx - 2xy + 4cy$; |
| г) $2a^2 - 2ab + 3ax - 3bx$; | к) $a^2 + ab - 2ac - 2bc$; |
| д) $ax^2 + bx^2 - ax - cx^2 - bx - cx$; | л) $2x^2 - ax + ay - 2y^2$; |
| е) $ax^2 + bx^2 - bx - ax - a - b$; | м) $2x^2 - cx - 2xy + cy$. |

1113. Разложите на множители многочлен:

- | | |
|-------------------------------|---------------------------|
| а) $x^2 - 2ax + a^2 - 1$; | д) $8x^2 + 6xy + y^2$; |
| б) $x^2 + 4ax + 4a^2 - 4$; | е) $x^2 + 8xy + 15y^2$; |
| в) $9x^2 + 6ax + 4a^2 - 9$; | ж) $3a^2 - 4ax + x^2$; |
| г) $4x^2 - 12ax + 9a^2 - 4$; | з) $4a^2 - 12ax + 9x^2$. |

1114. Разложите на множители многочлен:

- а) $u^4 - 2u^3 + u^2 - 1$;
б) $v^4 - v^2 - 2v - 1$;
в) $w^8 - w^4 - 2w^2 - 1$;
г) $x(x + 2) - (y + 1)(y - 1)$;
д) $(t + z - 2)(t + z) - (t - z)^2 + 1$;
е) $a^3 - b^3 + 3b^2 - 3b + 1$;
ж) $8c^3 + d^3 + 6d^2 + 12d + 8$;
з) $(e + f)(e - f)^3 - (e - f)(e + f)^3$;
и) $(i - h)^2(i + h)^5 + (i + h)^2(i - h)^5$.

1115. Разложите на множители многочлен:

- а) $r^4 - 12r^2 + 16$;
- | |
|------------------|
| в) $w^4 + 324$; |
|------------------|
- б) $s^4 + 2s^2 + 9$;
- | |
|--------------------------|
| г) $g^4 - g^3 - g - 1$; |
|--------------------------|

- д) $q^8 - q^6 - 4q^2 - 16$; ж) $(k+l)(k+l+2) - (k-l)(k-l-2)$;
 е) $a^2 + ab - 2b^2 - a + b$; з) $c(c+2) + d(d+2) - 2(c+1)(d+1) + 1$.

1116. Разложите на множители многочлен:

- а) $(i+j)(i+j+2) + (i-j)(i-j+2) + 2(i+j+1)(i-j+1) - 2$;
 б) $a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c) - 4c^2$;
 в) $1 - p(p-q+r) + q(p-q+r) + r(q-p-r)$;
 г) $mn(m+n) + np(n-p) - mp(m+p)$;
 д) $r(s^2 - t^2) + s(t^2 - r^2) + t(r^2 - s^2)$;
 е) $d(e+f)^2 + e(d+f)^2 + f(d+e)^2 - 4def$;
 ж) $(xy+xz+yz)(x+y+z) - xyz$;
 з) $k^3 + l^3 + m^3 - (k+l+m)^3$.

1117. Упростите выражение:

- а) $(i+j+k)^2 + (i+j-k)^2 + (i-j+k)^2 + (-i+j+k)^2$;
 б) $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)(x^{16}+y^{16})(x^{32}+y^{32})$, учитывая, что $x-y=1$.

1118. Найдите значение выражения:

- а) $x^2 + y^2 + z^2$, учитывая, что $x+y+z=4$ и $xy+yz+zx=-5$;
 б) $pq - pr - rq$, учитывая, что $p+q-r=4$ и $p^2+q^2+r^2=55$.

1119. Найдите наименьшее значение выражения:

- а) $(2u+1)(2u-1) + 3v(3v-4u)$; б) $2r^2 - 2rs + s^2 - 2r + 2$.

1120. Найдите наибольшее значение выражения:

- а) $4m(5n-m) - (5n-2)(5n+2)$; б) $2xy - x^2 - 2y^2 + 4y$.

1121. Докажите, что равенство $a=b=c$ следует из равенства:

- а) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$;
 б) $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = (a+b-2c)^2 + (b+c-2a)^2 + (c+a-2b)^2$.

1122. Найдите область определения выражения:

- а) $\frac{3}{x^2-25}$; е) $\frac{3}{3-|3b-2|}$; л) $\frac{d^2-16}{d^2-6d+8}$;
 б) $\frac{3y}{2y+7y^2}$; ж) $\frac{13}{|3c-1|-|c-2|}$; м) $\frac{3-6h}{2h^2+5h-2}$;
 в) $\frac{1-z^8}{1-z^4}$; з) $\frac{u}{u^2-3|u|}$; н) $\frac{4m+3n^2}{9n^4-16m^2}$;
 г) $\frac{11}{w-\frac{1}{w}}$; и) $\frac{7t}{(2t+1)^4-(t-1)^4}$; о) $\frac{3}{r^2+5rs-6s^2}$;
 д) $\frac{a-3}{|a|-3}$; к) $\frac{2v+1}{(4v-2)^5-(1-2v)^5}$; п) $\frac{2t+3z}{z^2-9-t^2+6t}$.

1123. Сократите дробь:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{20a^3b + 12a^2b - 24a^2c}{25ab^2 + 15b^2 - 30bc}; & \text{д)} \frac{(5x-4)^2 + 2(5x-4)(4-3x) + (3x-4)^2}{(2x+5)^2 - 2(2x+5)(5-3x) + (3x-5)^2}; \\ \text{б)} \frac{27r^5s^2 + 6r^4s^2t - 9r^4s^2}{72r^2st^2 + 16rst^3 - 24rst^2}; & \text{е)} \frac{(4y+5)^2 + 32y^2 - 50 + (4y-5)^2}{(4y-5)^2 - 32y^2 + 50 + (4y+5)^2}; \\ \text{в)} \frac{m^5 - m^4n - mn^4 + n^5}{m^4 - m^3n - m^2n^2 + mn^3}; & \text{ж)} \frac{12x^3 + 4x^2 + 9x + 3}{4x^3 + 8x^2 + 3x + 6}; \\ \text{г)} \frac{uv(c^2 + d^2) + cd(u^2 + v^2)}{uv(c^2 - d^2) + cd(u^2 - v^2)}; & \text{з)} \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1}. \end{array}$$

1124. Сократите дробь:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{a^2 - a + 1}{a^4 + a^2 + 1}; & \text{д)} \frac{f^2 - g^2 - h^2 + 2gh}{g^2 - h^2 - f^2 - 2fh}; \\ \text{б)} \frac{b^4 + 4}{b^2 - 2b + 2}; & \text{е)} \frac{x^{n+2} - 4x^{n+1} + 4x^n}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}; \\ \text{в)} \frac{27c^3 - 64d^6}{16d^4 - 9c^2}; & \text{ж)} \frac{y^4 - 3y^2 + 2}{y^5 + 1}; \\ \text{г)} \frac{e^{33} + 1}{e^{11} - e^{22} + e^{33}}; & \text{з)} \frac{z^{47} + z^{46} + \dots + z + 1}{z^{15} + z^{14} + \dots + z + 1}. \end{array}$$

1125. Сократите дробь:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{x^4 + (2b^2 - a^2)x^2 + b^4}{x^4 + 2ax^3 + a^2x^2 - b^4}; & \text{в)} \frac{u^3w - 2u^2w^2 + uw^3 - uv^2w}{(u^2 + w^2 - v^2)^2 - 4u^2w^2}; \\ \text{б)} \frac{y^2 + (p+q)y + (p+q+y)r}{p^2 + 2pq + q^2 - y^2}; & \text{г)} \frac{i^3 + j^3 + k^3 - 3ijk}{(i-j)^2 + (j-k)^2 + (k-i)^2}. \end{array}$$

1126. Найдите числовое значение выражения:

$$\begin{array}{l} \text{а)} \frac{9x^2 - 24xy + 16y^2 - 25}{3x - 4y - 5} \text{ при } (x; y) = \left(\frac{1}{9}; 2\frac{1}{3}\right); \\ \text{б)} \frac{u^8 - v^8}{(u^4 + v^4)(u^3 + u^2v + uv^2 + v^3)} \text{ при } (u; v) = \left(17\frac{1}{16}; \frac{1}{16}\right). \end{array}$$

1127. Если возможно, найдите значение выражения:

$$\begin{array}{l} \text{а)} \frac{u^4 + 2u^3 - 9u^2 - 18u}{u^2 - u - 6} \text{ при значении переменной } u, \text{ равном } -2; -1,5; 3; \\ \text{б)} \frac{v^{12} - 1}{(v^4 + v^2 + 1)(v^3 - v^2 + v - 1)} \text{ при значении переменной } v, \text{ равном } -2; 1; 3. \end{array}$$

1128. Рациональной дробью представьте выражение:

- а) $\frac{4a^2b}{(2a-3)^2} - \frac{9b}{(3-2a)^2}$;
 б) $\frac{m^2}{(m-3n)^3} + \frac{9n^2}{(3n-m)^3}$;
 в) $\frac{u^2v+16}{(v-1)(u-4)} - \frac{u^2+16v}{uv-u-4v+4}$;
 г) $\frac{3p^3-81q^3}{18pq^2+6p^2q+2p^3} + \frac{81p^2q-54pq^2+9q^3}{2pq^2-12p^2q+18p^3}$;
 д) $\frac{8-8w+2w^2}{w^4-4w^3+16w-16} - \frac{w}{w^2-4}$;
 е) $\frac{p+2}{p^3-3p^2-4p+12} - \frac{3-p}{p^2-5p+6}$.

1129. Докажите, что при всех наборах значений переменных из области определения значение выражения:

- а) $(a-2b)^2 - \frac{8b^2(2b^2-a^2)}{(2b+a)^2}$ неотрицательно;
 б) $\frac{3c+2}{9c^2-6c+4} - \frac{18c}{27c^3+8} - \frac{1}{3c+2}$ равно нулю.

1130. Упростите выражение:

- а) $\left(\frac{x}{y} + \frac{2}{y}\right) \cdot \frac{y}{x+2}$; в) $\left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right) : \frac{4xy}{x^2-y^2}$;
 б) $\left(\frac{x}{y} + \frac{2}{3y}\right) \cdot \frac{y}{6x+4}$; г) $\left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}\right) \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

1131. Упростите выражение:

- а) $\left(\frac{c}{c+1} + 1\right) \cdot \frac{1+c}{2c-1}$; в) $\left(\frac{1}{2x-3} + \frac{1}{2x+3}\right) \cdot \left(\frac{3}{2x} - \frac{2x}{3}\right)$;
 б) $\left(\frac{4a}{2-a} - a\right) : \frac{a+2}{a-2}$; г) $\left(3b - \frac{6b^2}{2b-5}\right) \cdot \frac{25-20b+4b^2}{12b^3-75b}$.

1132. Упростите выражение:

- а) $\frac{a^2-b^2}{3a} : \frac{a-b}{3} - \frac{1}{2}$; в) $\frac{ab+b^2}{5} : \frac{b^3}{5a} + \frac{a+b}{b}$;
 б) $\frac{a^2-b^2}{20a} : \frac{a^2-ab}{5} + \frac{1}{a}$; г) $\frac{a-b}{a} - \frac{7b}{5a^2} \cdot \frac{a^2-ab}{7b}$.

1133. Упростите выражение:

- а) $\frac{a^2-25}{4a+4} \cdot \frac{1+a}{5-a} - \frac{a-7}{6}$;
 б) $\left(\frac{a}{a-1} - \frac{a}{1+a} - \frac{a^2+1}{1-a^2}\right) \cdot \frac{1}{(a+1)^2}$;

$$в) \left(4 - \frac{9b^2 - 8}{3b - 8}\right) : \frac{2a + 6b - 3ab - 9b^2}{2b - 2};$$

$$г) \left(\frac{2}{2+a} - \frac{a}{a-2} - \frac{4a}{4-a^2}\right) \cdot \left(\frac{2}{2+a} + \frac{a}{a-2} + \frac{4a}{a^2-4}\right);$$

$$д) \left(\frac{10a^2 - b}{3 + 5a} - 2a\right) : \frac{50a^3 - 30a^2 + 18a}{27 + 125a^3};$$

$$е) \left(a + \frac{a^3 - 1}{a - 1}\right) : \frac{(a + 1)^3}{a^2 - 1}.$$

1134. Рациональной дробью представьте выражение:

$$а) \frac{a^2 - ab}{a^2b - b^3} + \frac{4a^2}{b^3 - ab^2 - a^2b + a^3};$$

$$б) 4m^2 - \frac{8m^3 + 27n^3}{2m - 3n} - 9n^2;$$

$$в) \frac{1}{x^2 - xz - xy + yz} + \frac{1}{y^2 - xy - yz + xz} + \frac{1}{z^2 - xz - yz + xy};$$

$$г) \frac{u + 2v}{3u - 3v} + \frac{3w - u}{2w - 2u} - \frac{u^2 - vw}{uv + uw - vw - u^2};$$

$$д) \frac{4p^2 - 6pq + 9q^2}{2p - 3q} \cdot \frac{9q^2 - 4p^2}{8p^3 + 27q^3};$$

$$е) \frac{3 - 6c}{2c^2 + 4c + 8} \cdot \frac{2c + 1}{c^2 - 4c + 4} \cdot \frac{8 - c^5}{4c^2 - 1};$$

$$ж) \frac{d^2 + de}{5d - d^2 + e^2 - 5e} \cdot \frac{d^2 - e^2 + 25 - 10d}{d^2 - e^2};$$

$$з) \frac{r + s}{r^2 - 4s + 4r - s^2} \cdot \frac{16 - s^2 - r^2 - 2rs}{r^2 + rs}.$$

1135. Найдите значение выражения:

$$а) (m + n) : (m - n), \text{ учитывая, что } m : n = 5 : 3;$$

$$б) \frac{a^2 - 2ab}{2ab - b^2}, \text{ учитывая, что } a : b = 2 : 5;$$

$$в) \frac{2a - 3b + c}{a + 2b + 3c}, \text{ учитывая, что } a : b : c = 4 : 3 : 2;$$

$$г) \frac{ab - 2bc + 3ac}{a^2 + 2ac}, \text{ учитывая, что } a : b : c = 4 : 3 : 2.$$

1136. Рациональной дробью представьте выражение:

$$а) \frac{64a^3 - 27b^3}{a^2 - 4} : \frac{16a^2 + 12ab + 9b^2}{a^2 + 4a + 4};$$

$$б) \frac{w^4 - 3w^2 + 1}{w^3 - 27} : \frac{w^2 + w - 1}{w^2 + 3w + 9};$$

$$в) \left(\frac{2g^{n+1}}{h^{n-2}}\right) \cdot (0,25g^{3-2n}h^{2n+1})^3;$$

$$\begin{aligned} \text{г)} \quad & \frac{6a(x^6 - y^{12})}{x^2 + xy^2 + y^4} : (a^3(2x + 2y^2)(3x^2 - 3xy^2 + 3y^4)); \\ \text{д)} \quad & \frac{2p^2 + 6pr - pq - 3qr}{2pq - 4p^2 + qr - 2pr} : \frac{2pr + pq + 3qr + 6r^2}{2pq + qr - 4pr - 2r^2}; \\ \text{е)} \quad & \left(\frac{u^{2l-1}v^{3l+2}}{w^{3-l}}\right)^4 \cdot \left(\frac{u^{l-1}v^{2-2l}}{w^{3l+1}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{v^{2l-1}}\right)^3 \cdot \left(\frac{w^{l+3}}{u^{l-1}}\right)^5, \end{aligned}$$

1137. Рациональной дробью представьте выражение:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \frac{u^2 + (p+q)u + pq}{u^2 - (p-r)u - pr} \cdot \frac{u^2 - r^2}{u^2 - p^2}; \\ \text{б)} \quad & \frac{2a^2 + ab - 6b^2}{6a^2 - 5ab + b^2} : \frac{2a^2 - 7ab + 6b^2}{3a^2 - 7ab + 2b^2}; \\ \text{в)} \quad & \frac{k^2 - kl + 4k - 5l - 5}{k^2 - 4l^2} \cdot \frac{k^3 - 2k^2l - 5k^2 + 10kl + 25k - 50l}{k^3 + 125}; \\ \text{г)} \quad & \frac{y^8 - 16}{y^2 + 2y + 2} \cdot \frac{y^4 + 2y^2 + 4}{y^4 - 2y^3 + 4y^2 - 4y + 4}; \\ \text{д)} \quad & \left(\frac{x}{x^2 + 2x + 4} + \frac{x^2 + 8}{x^3 - 8} - \frac{1}{x - 2}\right) \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} - \frac{2}{2 - x}\right); \\ \text{е)} \quad & \left(\frac{1}{2 - z} + \frac{6z - 4 - z^2}{z^3 - 8} - \frac{2 - z}{z^2 + 2z + 4}\right) \cdot \frac{z^3 + 4z^2 + 8z + 8}{4 - 4z + z^2 - z^3}; \\ \text{ж)} \quad & \left(\frac{r - 2s}{r^3 + s^3} + \frac{s}{r^3 - r^2s + rs^2}\right) : \frac{r^2 + s^2}{r^3 - rs^2} + \frac{2s^2}{r^3 + r^2s + rs^2 + s^3}; \\ \text{з)} \quad & \frac{\frac{1}{l} - \frac{1}{m - n}}{\frac{1}{l} + \frac{1}{m - n}} \cdot \left(1 - \frac{m^2 + n^2 - l^2}{2mn}\right) : \frac{m - n - l}{lmn}. \end{aligned}$$

1138. Выразите переменную t через другие переменные:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \frac{b - \frac{ab}{a+b}}{t} = \frac{a^2b^2}{a + \frac{ab}{a-b}}; \\ \text{б)} \quad & \frac{9 - 4c^2 - 4cd - d^2}{4c^2 + 2cd + 3d - 9} = \frac{3 + 2c + d}{t}; \\ \text{в)} \quad & \frac{m - n - 5}{t} = \frac{25 + m^2 - 10m - n^2}{m^2 + 2mn - 5m - 5n + n^2}; \\ \text{г)} \quad & \frac{p - q + r}{p^2 - q^2 + r^2 + 2pr} = \frac{t}{p^2 + pq - qr - r^2}. \end{aligned}$$

1139. Докажите, что значение выражения:

а) $\left(\frac{x+9}{x^2+2x+1} + \frac{2x}{1-x^2}\right) \cdot \left(\frac{2x+2}{3-x}\right)^2 - \frac{4}{1-x}$ при любом значении переменной x из области определения не зависит от этого значения;

б) $\left(\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2} + 1\right) : \left(\frac{2}{2a-b} + \frac{6b}{b^2-4a^2} - \frac{4}{2a+b}\right)$ при любых наборах значений переменных a и b из области определения не зависит от значения переменной b ;

в) $\frac{2}{(r+s)^3} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right) + \frac{1}{r^2+s^2+2rs} \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right)$ положительно при любых наборах значений переменных r и s из области определения;

г) $\left(\frac{u^2}{4v^3} + \frac{2}{u}\right) : \left(\frac{u}{2v^2} - \frac{1}{v} + \frac{2}{u}\right) : \frac{(u-2v)^2+8uv}{4+\frac{2u}{v}}$ положительно при любых наборах значений переменных u и v из области определения;

д) $\left(\frac{l-j}{2l-j} - \frac{l^2+j^2+l+5}{2l^2+l+j^2}\right) (2l-j-j^2+2lj)(j^2+j+l+j+i) : (5+l+2j^2)$ неположительно при любых наборах значений переменных i и j из области определения и не зависит от значения переменной l ;

е) $\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^4} + \frac{1}{1+y^8} + \frac{1}{1+y^{16}} + \frac{1}{1+y^{32}}$ отрицательно при любом значении переменной y , которое больше единицы.

1140. Учитывая, что $\frac{x+4y}{5x-7y} = 1$, найдите значение выражения:

а) $\frac{4x-5y}{3x+y}$;

б) $\frac{3x^2-2xy+y^2}{5x^2+2y^2}$;

в) $\frac{x^3-3xy^2}{4x^2y+3y^3}$.

1141. Сократите дробь:

а) $\frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}$;

в) $\frac{c^4+4c^2\sqrt{3}+12}{c^4-12}$;

б) $\frac{a+2\sqrt{3a}+3}{a-3}$;

г) $\frac{\sqrt{-x}+\sqrt{xy}}{1+\sqrt{\sqrt{y^2}}}$.

1142. Упростите выражение:

а) $\sqrt{75x^3y^6}$, учитывая, что $y < 0$;

б) $\sqrt{-8a^3b^7}$, учитывая, что $b > 0$;

в) $\sqrt{m^3-n^3+m^2n-mn^2}$, учитывая, что $m > n > 0$;

г) $\frac{u+\sqrt{uv}}{v+\sqrt{uv}}$, учитывая, что $u < 0$.

1143. Упростите выражение:

- а) $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{x-y}{x}$;
- б) $\left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{a-b} \right)$;
- в) $\left(\frac{2+\sqrt{t}}{t+2\sqrt{t}+1} - \frac{\sqrt{t}-2}{t-1} \right) \cdot \frac{t\sqrt{t}+t-\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}}$;
- г) $\frac{2a\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, учитывая, что $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$ и $b < a < 0$.

1144. Упростите выражение:

- а) $\frac{2}{3+x\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)$;
- б) $\left(\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2}+\sqrt{a}} - \sqrt{2} \right) \cdot \frac{a-2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \frac{a-b}{a-\sqrt{2a}}$;
- в) $\frac{u^2+u\sqrt{2}}{u^2+2} \cdot \left(\frac{u}{u-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}} \right)$;
- г) $\left(\frac{v^2}{2} + \frac{v}{\sqrt{2}} + 1 \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{v^4+2v^2+4} \cdot \left(\frac{v^2}{2} - \frac{v}{\sqrt{2}} + 1 \right)$;
- д) $\frac{p+2\sqrt{3}}{3p-3\sqrt{3}} + \frac{p^2-q\sqrt{3}}{p^2-pq+q\sqrt{3}-p\sqrt{3}} - \frac{3q-p}{2p-2q}$;
- е) $\left(\frac{2s}{s+t+\sqrt{2}} - 1 \right) \cdot \frac{4st((s+\sqrt{2})^2-t^2)}{2-s^2-t^2+2st}$.

1145. Упростите выражение:

- а) $\frac{a-b}{a^2+ab} \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right)$;
- б) $\left(\frac{\sqrt{l}}{4} - \frac{1}{\sqrt{4l}} \right) \cdot \left(4\sqrt{l} + \frac{\sqrt{l}+1}{\sqrt{l}-1} - \frac{\sqrt{l}-1}{\sqrt{l}+1} \right)$;
- в) $\left(\sqrt{b} - \frac{\sqrt{bc}+c}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{bc}}{b-c} \right)$;
- г) $\frac{2z}{(y+z)\sqrt{y+z} - (y-z)\sqrt{y-z}} \cdot \frac{\frac{2y}{\sqrt{y+z}} + \sqrt{y-z}}{\sqrt{\frac{y-z}{y+z}} + 1}$;

$$д) \frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{g} + \sqrt{h}} - \frac{\sqrt{gh}}{g-h} + \frac{g\sqrt{g} + h\sqrt{h}}{\sqrt{g} + \sqrt{h}} : (g-h);$$

$$е) \frac{2(p\sqrt{p} - q\sqrt{q})}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})(p+q - \sqrt{(p+q)^2 - (p-q)^2})} + \frac{p-q}{p+q + \sqrt{(p+q)^2 - (p-q)^2}}.$$

1146. Упростите выражение:

$$а) \sqrt{\frac{3a+b^3}{2b}} - \sqrt{3ab} - \sqrt{\frac{3a+b^3}{2b}} + \sqrt{3ab}, \text{ учитывая, что значения}$$

переменных a и b положительны;

$$б) \frac{\sqrt{u^4 - 6u^3 - 9u^2} + \sqrt{4u^4 - 4u^3 + u^2}}{\sqrt{u^2 + 4u + 4}}, \text{ учитывая, что значения пере-}$$

менной u принадлежат промежутку $(0,5; 3)$;

$$в) \frac{\sqrt{v^2 - 4v + 3} + \sqrt{v^2 - 3v}}{\sqrt{6 - 2v}}, \text{ учитывая, что значения переменной } v$$

отрицательны.

1147. Докажите, что при всех значениях переменных из области определения постоянное значение имеет выражение:

$$а) \frac{\cos^4 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta};$$

$$б) \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2}{\frac{1}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

1148. Упростите выражение:

$$а) \sqrt{\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha)};$$

$$б) \sqrt{\cos^2 \beta (1 + \operatorname{tg} \beta) + \sin^2 \beta (1 + \operatorname{ctg} \beta)};$$

$$в) \sqrt{4 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha + 1} - \sqrt{4 - 4 \sin^2 \alpha};$$

$$г) \sqrt{2 - 2 \cos^2 \beta} + \sqrt{2 \sin^2 \beta - 2\sqrt{2} \sin \beta + 1}.$$

1149. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

$$а) \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha;$$

$$в) 3 \cos^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$б) 3 \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \alpha;$$

$$г) 2 \sin^2 \alpha + 3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha.$$

Уравнения и неравенства

Из выражений с переменными с помощью отношений *равно*, *меньше*, *больше* и их отрицаний — *не равно*, *больше или равно*, *меньше или равно* образуются формулы:

$$A = B, A < B, A > B, A \neq B, A \geq B, A \leq B.$$

Формула-равенство $A = B$ называется *уравнением*, формулы-неравенства $A < B, A > B, A \neq B, A \geq B, A \leq B$ — *неравенствами с переменными*.

Значение переменной, при котором уравнение обращается в истинное числовое равенство, называют *корнем уравнения*.

Решить уравнение означает найти все его корни или установить, что их нет.

Значение переменной, при котором неравенство с переменной обращается в истинное числовое неравенство, называют *решением неравенства*.

Решить неравенство означает найти все его решения или установить, что их нет.

Формула, которая обращается в истинное высказывание при любых наборах значений входящих в нее переменных, называется *тождественно истинной формулой*. Тождественно истинные формулы-равенства называют еще *тождествами*.

Из формул образуются их системы.

Системой формул называется формула, состоящая из двух или более формул и которая истинна при тех и только тех наборах значений переменных, при которых истинна каждая из формул.

Система, состоящая из формул A и B , обозначается

$$\begin{cases} A, \\ B. \end{cases}$$

Каждое значение переменной, удовлетворяющее системе формул, называется *решением системы*.

Решить систему означает найти все ее решения или установить, что их нет.

Решение уравнений, неравенств и их систем часто предусматривает сведение их к стандартным уравнениям или неравенствам. При этом полученное в результате преобразований уравнение, неравенство или система должны иметь те

же решения, что и исходные уравнение, неравенство или система. В таком случае говорят о *равносильных* уравнениях, неравенствах, системах.

Преобразованиями равносильности уравнений или неравенств являются:

- перенос слагаемого из одной части уравнения или неравенства в другую с изменением его знака;
- умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же не равное нулю число;
- умножение или деление обеих частей неравенства на одно и то же положительное число;
- умножение или деление обеих частей неравенства на одно и то же отрицательное число с заменой знака неравенства знаком противоположного смысла.

Алгоритмы решения линейного и квадратного уравнений представляют схемы, приведенные на рисунках 453 и 454 соответственно.

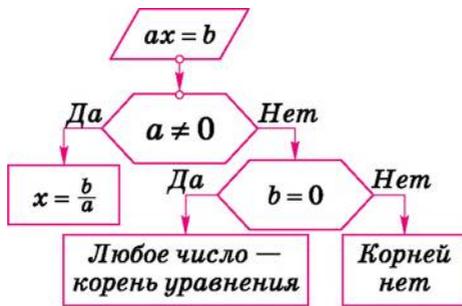


Рис. 453

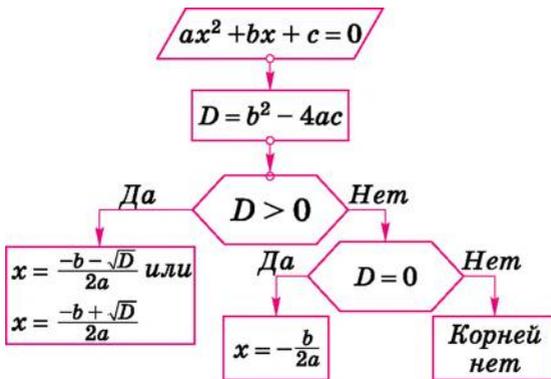


Рис. 454

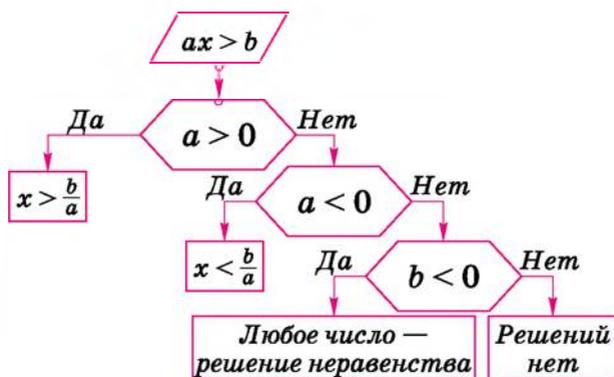


Рис. 455

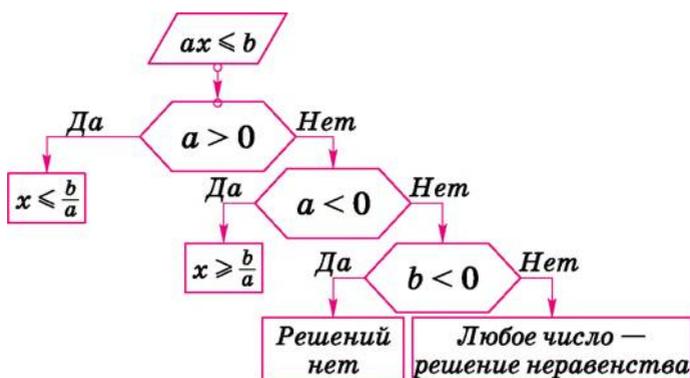


Рис. 456

Алгоритмы решения линейных неравенств $ax > b$ и $ax \leq b$ представлены схемами, приведенными на рисунках 455 и 456.

1150. Вы знаете две средних величины положительных чисел a и b — среднее арифметическое $\frac{a+b}{2}$ и среднее геометрическое \sqrt{ab} . Используются еще среднее гармоническое $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

и среднее квадратическое $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Докажите, что истинны неравенства:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

1151. Докажите, что при любых значениях переменных истинно неравенство:

- а) $a^2 - ab + b^2 \geq ab$;
- б) $u^2 + v^2w^2 \geq 2uvw$;
- в) $k(k-l) \geq l(k-l)$;
- г) $(x^2 - y^2)^2 \geq 4xy(x-y)^2$;
- д) $m + n + mn \leq m^2 + n^2 + 1$;
- е) $(pq + qr + rp)^2 \geq 3pqr(p + q + r)$;
- ж) $f^2(1 + g^2) + g^2(1 + h^2) + h^2(1 + f^2) \geq 6fgh$;
- з) $2\sqrt{c^2 + 2} < c^2 + 3$.

1152. Докажите, что при любых значениях переменных истинно неравенство:

- а) $a^8 + a^6 - 4a^4 + a^2 + 1 \geq 0$;
- б) $2b^4 - 2b^3 - b^2 + 1 \geq 0$;
- в) $c^4 - c^2 + 2c + 2 \geq 0$;
- г) $d^{12} - d^9 + d^4 - d + 1 > 0$.

1153. Докажите, что:

- а) если $a > 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}$;
- б) если $c < d$, то $c < \frac{c+d}{2} < d$;
- в) если $\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s}$, то $\frac{p+q}{q} \leq \frac{r+s}{s}$ и $\frac{p+qk}{q} \leq \frac{r+sk}{s}$;
- г) если $f > 0$, $h > 0$ и $\frac{e}{f} \leq \frac{g}{h}$, то $\frac{e}{f} \leq \frac{e+g}{f+h} \leq \frac{g}{h}$.

1154. Решите уравнение:

- а) $17a + 11 - 21a = 36 - 9a - 5$;
- б) $4b + 15 - 2b = 98 - 19b - 18$;
- в) $5d - 12 - 7d + 11 = 8 + 8d + 4$;
- г) $7f - 9 - 3f + 5 = 14f - 6 - f$;
- д) $5c - 9 - 6c = 10 - 15c - 15$;
- е) $16g - 12 + 2g - 8g = 25 + 3g - 22$;
- ж) $20u + 30 - 11u = 39 - 6u + 24$;
- з) $7v - 9 - 20v + 7 = 12v + 9 - 7v - 7$.

1155. Решите уравнение:

- а) $9(x + 3) - 6(x + 2) = 5(x - 1)$;
- б) $3(8 - y) = 11(y + 2) - 6(y + 1)$;
- в) $5 - 7(3z + 6) = 5(z - 3) - 2(z - 7)$;
- г) $128 + 7(1 - 2t) = 4(5t + 2) + 5(8 - t)$;

- д) $8(3a - 1) - 9(5a - 11) + 2(7 - 2a) = 30$;
 е) $11(b - 4) - 3(4 - 3b) + 10(8 - 3b) = 4$;
 ж) $3(2c + 1) + 7(6c - 1) + 5(12c - 7) = 23$;
 з) $3(2u + 1) - 4(1 - 3u) - 5(6u - 7) = 1$.

1156. Решите уравнение:

- а) $10\left(9 - \frac{1}{2}y\right) = 6 + 9y$;
 б) $9\left(17 - \frac{4}{5}z\right) = 5(z - 6)$;
 в) $57 + \frac{5}{7}w = \frac{8}{4}w + 2w$;
 г) $0,15h + 0,1 = 5,1 + 0,1h$;
 д) $6,6 - 0,2g = 5(5g - 1) - 2,7g + 0,5g$;
 е) $0,36u - 3,4 = 0,3(0,4u - 1,2)$;
 ж) $0,125x - 0,765x - 5,425x + 1,85x = 1,2x - 5,375$;
 з) $7,2 - 0,855y - 34,1885 = 3,45y - 18,2 - 5,7y$.

1157. Решите уравнение:

- а) $\frac{x-5}{2} - \frac{x-4}{3} = \frac{x-3}{4} - \frac{x-1}{8}$;
 б) $\frac{7y}{3} + \frac{13-y}{2} = \frac{3y-1}{5} + \frac{11(y+3)}{6}$;
 в) $\frac{9z+7}{2} - \left(z - \frac{z-2}{7}\right) = 36$;
 г) $\frac{7+9u}{4} - 7u = \left(1 - \frac{2-u}{9}\right)$;
 д) $\frac{3a+4}{7} - \frac{9a+44}{5} + \frac{3(3a+10)}{4} = \frac{5a+12}{3}$;
 е) $\frac{b+10}{3} + \frac{16b-3}{20} - \frac{7b-6}{4} = \frac{b-3}{2} + \frac{3(b-3)}{10}$;
 ж) $\frac{3c+2}{18} - \frac{5c-8}{24} = \frac{3(2c+1)}{36} - \frac{c-1}{6} - \frac{2}{9}$;
 з) $\frac{26d-51}{52} - \frac{2(1-3d)}{13} = d - \frac{20d-(10-3d)}{156}$.

1158. Решите уравнение:

- а) $9x + 8x^2 = -1$;
 б) $3 + 3x^2 = 4x$;
 в) $25 - 10x + x^2 = 0$;
 г) $4x - 4x^2 = 1$;
 д) $3x^2 - 4 = 0$;
 е) $8 + 9x^2 = 18x$;
 ж) $2x = -x^2 - 1$;
 з) $20x + 25x^2 = -4$;
 и) $-1 - 4x^2 = 0$;
 к) $0,5x - x^2 = 0$;
 л) $12 - 17x - 5x^2 = 0$;
 м) $7x - 4x^2 = -15$.

1159. Решите уравнение:

- | | |
|--------------------------|-----------------------------|
| а) $2 - 9x^2 = 0$; | ж) $5 = 2x - x^2$; |
| б) $-15 - 2x^2 = -11x$; | з) $16 + x^2 = 8x$; |
| в) $-0,49 - x^2 = 0$; | и) $1 - 4x^2 + 3x = 0$; |
| г) $16x + 64 = -x^2$; | к) $-12x + 4 = -9x^2$; |
| д) $13x + 3x^2 = -14$; | л) $10x^2 - 2 = x$; |
| е) $7x^2 - 3x = 0$; | м) $25x^2 + 40x + 16 = 0$. |

1160. Решите уравнение:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| а) $r^2 - 20r - 800 = 0$; | ж) $x^2 - 23x + 132 = 0$; |
| б) $s^2 + 21s + 108 = 0$; | з) $y^2 + 24y + 143 = 0$; |
| в) $t^2 - 21t + 108 = 0$; | и) $z^2 - 24z + 143 = 0$; |
| г) $u^2 + 22u + 120 = 0$; | к) $a^2 + 25a + 156 = 0$; |
| д) $v^2 - 22v + 120 = 0$; | л) $h^2 + 60h + 800 = 0$; |
| е) $w^2 + 23w + 132 = 0$; | м) $b^2 - 25b + 156 = 0$. |

1161. Решите приведенное квадратное уравнение:

- | | | |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| а) $a^2 + a - 2 = 0$; | д) $e^2 + e - 12 = 0$; | и) $k^2 + k - 42 = 0$; |
| б) $b^2 - b - 2 = 0$; | е) $f^2 - f - 12 = 0$; | к) $l^2 - l - 42 = 0$; |
| в) $c^2 + c - 6 = 0$; | ж) $g^2 + g - 20 = 0$; | л) $n^2 - n - 56 = 0$; |
| г) $d^2 - d - 6 = 0$; | з) $h^2 - h - 20 = 0$; | м) $m^2 + m - 56 = 0$. |

1162. Решите приведенное квадратное уравнение:

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| а) $p^2 + p - 72 = 0$; | ж) $v^2 - 9v + 20 = 0$; |
| б) $q^2 - q - 72 = 0$; | з) $s^2 + 21s + 108 = 0$; |
| в) $x^2 - 4x + 3 = 0$; | и) $z^2 - 4z - 5 = 0$; |
| г) $u^2 + 9u + 20 = 0$; | к) $w^2 + 10w + 9 = 0$; |
| д) $r^2 - 20r - 8000 = 0$; | л) $t^2 - 21t + 108 = 0$; |
| е) $y^2 + 4y - 5 = 0$; | м) $a^2 + 4a - 12 = 0$. |

1163. Решите приведенное квадратное уравнение:

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| а) $l^2 + 80l + 1500 = 0$; | ж) $y^2 - 16y + 60 = 0$; |
| б) $m^2 - 80m + 1500 = 0$; | з) $d^2 + 19d + 90 = 0$; |
| в) $k^2 - 60k + 800 = 0$; | и) $w^2 - 15w - 700 = 0$; |
| г) $q^2 - 12q + 35 = 0$; | к) $e^2 - 19e + 90 = 0$; |
| д) $v^2 + 15v - 700 = 0$; | л) $z^2 + 17z - 168 = 0$; |
| е) $x^2 + 16x + 60 = 0$; | м) $l^2 + 20l - 3500 = 0$. |

1164. Решите квадратное уравнение со вторым четным коэффициентом:

а) $5x^2 - 4x - 12 = 0$;

ж) $3w^2 - 2w - 8 = 0$;

б) $4y^2 - 4y - 3 = 0$;

з) $25a^2 + 90a + 81 = 0$;

в) $4z^2 - 4z - 15 = 0$;

и) $36b^2 - 84b + 49 = 0$;

г) $9t^2 - 12t - 5 = 0$;

к) $9c^2 - 4c - 4 = 0$;

д) $9u^2 - 24u - 20 = 0$;

л) $7d^2 + 18d + 5 = 0$;

е) $5v^2 - 8v + 3 = 0$;

м) $9u^2 - 6w - 35 = 0$.

1165. Решите уравнение:

а) $(x - 1)(x - 2) = 6$;

ж) $(3a + 2)^2 = 3(a + 2)$;

б) $(y - 2)(12 - y) = 9$;

з) $(3b - 1)^2 = 12(3 - b)$;

в) $(z - 2)^2 = 2(3z - 10)$;

и) $(3c - 2)(c - 3) = 20$;

г) $(u + 1)^2 = 3(u + 7)$;

к) $(d + 2)(4d - 5) = -3$;

д) $(2w - 3)^2 = 8w$;

л) $(3f - 2)^2 = 8(f + 1)^2 - 100$;

е) $(2v + 5)^2 = 2(2v + 9)$;

м) $(3 - g)(4 - g) = 2g^2 - 20g + 48$.

1166. Решите уравнение:

а) $(6x - 1)^2 - 4(3x - 2)(3x + 2) + 7 = 0$;

б) $(2z - 3)^2 - 4(z + 2)(z - 1) + 3 = 0$;

в) $(10y - 3)^2 - 4(5y + 1)(5y - 1) + 7 = 0$;

г) $(2 - 3t)^2 + 3(t + 3)(4 - 3t) + 5 = 0$.

1167. Решите уравнение:

а) $(13x - 4)(13x + 42) - (12x - 1)^2 - (5x + 3)^2 = 5$;

б) $(7y + 11)(7y - 11) + 4(12y + 5)^2 - 25(5y - 1)^2 = 27$;

в) $(4z - 2)(3 - z) + (z - 2)(6 - 2z) = 0$;

г) $(5 - a)(3a - 3) + (a - 1)(10 - 2a) = 0$.

1168. Решите уравнение:

а) $\frac{a^2}{2} - \frac{a}{3} + 8\frac{3}{8} = 9$;

д) $\frac{p}{4} + \frac{2}{p} + \frac{(p+1)^2}{p} = \frac{(p+1)(p+2)}{p}$;

б) $\frac{b+1}{b-2} = \frac{3b-7}{b-1}$;

е) $\frac{q+1}{3} + \frac{3(q-1)}{4} = (q-3)^2 + 1$;

в) $\frac{c-7}{3(c-3)} = \frac{3c-7}{c-1}$;

ж) $\frac{(r-12)^2}{6} - \frac{r}{9} + \frac{r(r-9)}{18} = \frac{(r-14)^2}{2} + 5$;

г) $\frac{d-7}{2(d+3)} = \frac{d-6}{d+24}$;

з) $\frac{(s+2)(s-5)}{3} - \frac{11s+12}{10} = 2 - \frac{s-2}{8}$.

1169. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2 - 6x}{x - 5} - \frac{5}{5 - x} = 0;$

д) $4x - \frac{12x}{3 - 2x} + 1 = 0;$

б) $\frac{x + 2}{x} - \frac{5x + 1}{x + 1} = 0;$

е) $\frac{3x - 2}{3x + 2} = \frac{3x - 5}{2x + 5};$

в) $\frac{1}{x + 3} - \frac{18}{x^3 - 9x} = \frac{2}{3x - x^2};$

ж) $\frac{x + 1}{x - 1} = \frac{3x}{x + 1} - 1;$

г) $x - \frac{x^2}{x - 1} + \frac{2x}{x + 1} = 0;$

з) $\frac{1}{3x^2 - x} = \frac{4}{1 - 6x + 9x^2} - \frac{4}{9x^2 - 1}.$

1170. Найдите три последовательных целых числа, учитывая, что:

- а) их произведение меньше куба среднего числа на 28;
- б) их произведение на столько же меньше куба среднего числа, на сколько утроенная сумма искомым чисел меньше 20;
- в) квадрат среднего числа на 11 меньше суммы квадратов двух других чисел;
- г) утроенная сумма их квадратов на 21 больше их удвоенной суммы.

1171. Без решения определите, сколько корней имеет уравнение:

а) $2x^2 - 5x + 4 = 0;$

е) $9x^2 - 2x = 8;$

б) $x^2 - 10x + 25 = 0;$

ж) $4x + 6x^2 = -2,5;$

в) $5x^2 - 3x - 1 = 0;$

з) $3x^2 - 5x = -1;$

г) $-4x^2 - 5x + 1 = 0;$

и) $6 = 2x - 3x^2;$

д) $-8x + 5 = 8x^2;$

к) $3x^2 + 4x = 8.$

1172. Без решения определите, сколько корней имеет уравнение:

а) $3x^2 - 7x + 4 = 0;$

е) $9x^2 - 12x = -4;$

б) $2x^2 - 10x - 25 = 0;$

ж) $4x - 6x^2 = -25;$

в) $5x^2 - 6x + 4 = 0;$

з) $3x^2 - 5x = -4;$

г) $-6x^2 - 5x + 1 = 0;$

и) $6x - 1 = 9x^2;$

д) $-8x + 5 = -3x^2;$

к) $3x^2 + 4 = 8.$

1173. Без решения определите, сколько корней имеет уравнение:

а) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0;$

г) $-4x^2 + 3x^4 + 1 = 0;$

б) $x^4 + 7x^2 = 0;$

д) $-12x^4 + 4 = -9x^2;$

в) $5x^4 - 3x^2 - 1 = 0;$

е) $10x^2 - 2 = x^4.$

1174. Без решения определите, сколько корней имеет уравнение:

- а) $2x^2 - 5|x| + 1 = 0$; г) $-4|x| + 2x^2 + 1 = 0$;
б) $x^2 + 3|x| = 0$; д) $-10x^2 + 4 = -9|x|$;
в) $2x^2 - 3|x| - 1 = 0$; е) $8|x| - 2 = x^2$.

1175. Определите, при каких значениях переменной a уравнение:

- а) $x^2 - 6x + a = 0$ имеет один корень;
б) $x^2 - ax + 3 = 0$ имеет корнем число 2;
в) $5x^2 - 4x - a = 0$ не имеет корней;
г) $3x^2 - 4x + a = 0$ имеет два корня;
д) $-ax^2 + 4x = -6$ имеет корни одного знака;
е) $5x^2 - 2x = a - 2$ имеет корни разных знаков.

1176. Учитывая, что один из корней уравнения:

- а) $x^2 + px + 15 = 0$ равен 3, найдите второй его корень и коэффициент p ;
б) $x^2 + px - 12 = 0$ равен 4, найдите второй корень и коэффициент p .

1177. Учитывая, что разность:

- а) корней уравнения $x^2 + 3x + p = 0$ равна 1, найдите эти корни и коэффициент p ;
б) корней уравнения $5x^2 + 8x + p = 0$ равна 0,4, найдите эти корни и коэффициент p ;
в) квадратов корней уравнения $x^2 - 3x + p = 0$ равна 21, найдите эти корни и коэффициент p .

1178. Один из корней уравнения $-7x^2 + (p + 3)x - p = 0$ равен 5. Найдите коэффициент p уравнения и второй его корень.

1179. Подбором решите уравнение:

- а) $x^2 + 4x + 3 = 0$; в) $5x^2 - 4x - 1 = 0$; д) $x^2 + 5 = -6x$;
б) $x^2 - 4x + 3 = 0$; г) $3x^2 + 4x - 7 = 0$; е) $2x^2 + 2 = 5x$.

1180. Составьте уравнение с целыми коэффициентами, корнями которого являются числа:

- а) -1 и -3 ; б) $0,5$ и 4 ; в) -5 и $\frac{1}{3}$; г) $0,5$ и $-\frac{1}{3}$.

1181. Сравните числа m и n , учитывая, что:

- а) $m - n = 0,023$; в) $m - n = 24^2 - 23^3$;
б) $m - n = (-0,03)^5$; г) $m - n = \frac{2}{21} - \frac{3}{85}$.

1182. Сравните с нулем значение выражения:

- а) $5a^2 + 0,14$; в) $(1 - b)^2 - 24^3 + 23^2$;
б) $0 \cdot m^3 - 2$; г) $\frac{c - d}{\left(\frac{2}{17}\right)^5 - \left(\frac{3}{29}\right)^8}$.

1183. Замените пропуски знаком такого отношения, чтобы получилось истинное утверждение:

- а) если $m > n$, то $n \dots m$;
б) если $a > b$, то $a + m \dots b + m$;
в) если $a < b$ и $c > 0$, то $ac \dots bc$;
г) если $a > b$ и $c < 0$, то $ac \dots bc$;
д) если $a > b$ и $b > 0$, то $a^2 \dots b^2$;
е) если $a < b$ и $ab > 0$, то $\frac{1}{a} \dots \frac{1}{b}$.

1184. Докажите, что истинно неравенство:

- а) $(5x - 1)(5x + 1) < 25x^2 + 4$; в) $z^2 - 4z + 5 > 0$;
б) $(3y + 6)^2 > 3y(y + 12)$; г) $a^2 + 4b^2 > 4ab - 8$.

1185. Определите, при любых ли значениях переменных истинно неравенство:

- а) $(2x - 3)(2x + 3) < 4x^2 + 4x$; в) $a^2 + 6a + 9 > 0$;
б) $(3y + 1)^2 > 9y^2 + 1$; г) $a^2 + 4ab + 4b^2 \geq 0$.

1186. Запишите истинное неравенство, которое получится, если:

- а) обе части неравенства $-5 < -2$ умножить на -3 ;
б) обе части неравенства $2,5 > -1,5$ разделить на -5 ;
в) к обеим частям неравенства $-6 < -1$ прибавить 4 ;
г) из обеих частей неравенства $6 > -5$ вычесть 10 .

1187. Определите, в каких пределах находятся значения выражений $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$, учитывая, что:

- а) $1 \leq a \leq 2$ и $2 < b < 3$; д) $-2 \leq a \leq -1$ и $-3 < b < -2$;
б) $2 \leq a < 5$ и $1 \leq b < 3$; е) $-5 \leq a < -2$ и $-3 \leq b < -1$;
в) $2 \leq a < 6$ и $1 < b \leq 3$; ж) $-6 \leq a < -2$ и $-3 < b \leq -1$;
г) $6 < a \leq 8$ и $1 \leq b < 2$; з) $-8 < a \leq -6$ и $-2 \leq b < -1$.

1188. Определите, какие четные значения может принимать выражение $2a - b$, учитывая, что:

- а) $-2 \leq a \leq -1$ и $3 < b < 4$; д) $-2 \leq a \leq -1$ и $-3 < b < -2$;
б) $-3 \leq a < -2$ и $2 \leq b < 3$; е) $-5 \leq a < -2$ и $-3 \leq b < -1$;
в) $2 \leq a < 6$ и $1 < b \leq 3$; ж) $-6 \leq a < -2$ и $-3 < b \leq -1$;
г) $6 < a \leq 8$ и $1 \leq b < 2$; з) $-8 < a \leq -6$ и $-2 \leq b < -1$.

1189. Определите, в каких пределах находятся значения выражения $(a + 1)(b - 2)$, учитывая, что:

- а) $1 \leq a \leq 2$ и $2 < b < 3$; д) $-2 \leq a \leq -1$ и $-3 < b < -2$;
б) $2 \leq a < 5$ и $1 \leq b < 3$; е) $-5 \leq a < -2$ и $-3 \leq b < -1$;
в) $2 \leq a < 6$ и $1 < b \leq 3$; ж) $-6 \leq a < -2$ и $-3 < b \leq -1$;
г) $6 < a \leq 8$ и $1 \leq b < 2$; з) $-8 < a \leq -6$ и $-2 \leq b < -1$.

1190. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $-a^2 + 2b - 3$, учитывая, что:

- а) $1 \leq a \leq 2$ и $2 < b < 3$; д) $-2 \leq a \leq -1$ и $-3 < b < -2$;
б) $2 \leq a < 5$ и $1 \leq b < 3$; е) $-5 \leq a < -2$ и $-3 \leq b < -1$;
в) $2 \leq a < 6$ и $1 < b \leq 3$; ж) $-6 \leq a < -2$ и $-3 < b \leq -1$;
г) $6 < a \leq 8$ и $1 \leq b < 2$; з) $-8 < a \leq -6$ и $-2 \leq b < -1$.

1191. Значением выражения $\frac{6a}{b-1}$ является целое число, кратное 9. Найдите его, учитывая, что $1,5 < a < 2,5$ и $0,1 < b < 0,4$.

1192. Решите неравенство:

- а) $-(3x - 2) \leq 4(x + 2)$; в) $\frac{x+1}{4} - \frac{7-3x}{10} \leq \frac{4x+1}{5}$;
б) $\frac{x+4}{5} - \frac{3x-1}{2} \geq 2(x-1)$; г) $\frac{x-1}{3} - \left(2x - \frac{5-2(x-1)}{4}\right) \geq x + 2\frac{3}{4}$.

1193. Определите, при каких значениях переменной график зависимости:

- а) $y = -5x + 1$ находится выше графика зависимости $y = 3x + 2$;
б) $y = 2x + 1$ находится выше графика зависимости $y = -3x + 2$;
в) $y = -3x - 2$ находится ниже графика зависимости $y = 4x - 5$;
г) $y = 4x + 3$ находится ниже графика зависимости $y = -2x - 9$.

1194. Найдите все значения переменной a , при которых число -2 является решением неравенства:

- а) $2x + 3a > -5ax + 3$; в) $2 - a - 6x \leq a - 5 + 3ax$;
б) $-3a - x + 4 > 3 + a - 4ax$; г) $2a - 3ax + 1 \geq 6x - a - 5$.

1195. Решите систему неравенств:

- а) $\begin{cases} 6 - 2x > 3(x - 3), \\ 1 - x < 2x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 10x > -5(9 + x), \\ 10x + 3 < 9 + 15x; \end{cases}$
б) $\begin{cases} 10 - 4x > 3(1 - x), \\ 14 + x < 8x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -3(x + 2) < -2 + x, \\ 4x - 2 > 2(3 - x). \end{cases}$

1196. Определите, при каких значениях переменной выражение:

- а) $(5x - 1)(3x + 2)$ принимает положительные значения;
б) $(2x + 1)(4x - 3)$ принимает отрицательные значения;
в) $(4x + 3)(3x - 1)$ принимает положительные значения;
г) $(5x - 4)(2x + 3)$ принимает отрицательные значения.

1197. Решите неравенство:

- а) $\frac{6 - 2x}{x - 3} > 1$; в) $\frac{9 - 2x}{2x - 3} < 1$;
б) $\frac{10 - 3x}{x - 4} > 2$; г) $\frac{5 - 3x}{3x - 1} < 2$.

1198. Определите, при каких значениях переменной значение выражения:

- а) $\frac{6x - 5}{3}$ принадлежит промежутку $[-2; 0]$;
б) $\frac{3x + 5}{4}$ принадлежит промежутку $[-3; 1]$;
в) $\frac{6 - 5x}{4}$ принадлежит промежутку $(-4; 2]$;
г) $\frac{5 - 2x}{8}$ принадлежит промежутку $[-2; 3]$.

1199. Определите, при каких значениях переменной истинно неравенство:

- а) $|2x + 1| \geq 3$; в) $|2 - 3x| \geq 5$;
б) $|3x - 1| \leq 2$; г) $|2 - 4x| \leq 2$.

1200. В школьном конкурсе от каждой параллели (с пятого по одиннадцатый класс) выставлялись команды с одина-

ковым количеством учеников. Определите, сколько учеников было в каждой команде, учитывая, что если бы участников конкурса было на 36 больше, то их было бы больше 69, но меньше 91, а если бы участников конкурса было на 29 меньше, то их было бы больше 14, но меньше 40.

1201. Решите уравнение:

а) $|2x + 1| = 3$;

б) $|2x - 1| = 5x - 10$;

в) $|x^2 - 1| = 3x^2$;

г) $\frac{|x - 2| - 5}{3 - |x - 2|} = 1$;

д) $||x - 1| - 3| = 5$;

е) $||x - 1| + x| = 5$;

ж) $|x - 3| + |x + 4| = 9$;

з) $|x - 3| + |x + 2| = 3 + |x - 4|$;

и) $|x - 5| + |x + 4| = 9$.

1202. Решите неравенство:

а) $|2x + 1| < 3$;

е) $||x - 2| + x| < 4$;

б) $2|x - 1| < x$;

ж) $|x - 3| - |x + 4| > 3$;

в) $|x - 3| > |x + 1|$;

з) $|x - 3| + |x + 2| < 3 + |x - 4|$;

г) $\left| \frac{x - 3}{x - 2} \right| > 1$;

и) $|x - 4| + |x + 5| < 12$;

д) $|2x - 3| > 4 - 5x$;

к) $|2x - 6| - |3 - 5x| \geq 4$.

Координаты и функции

Если на прямой выбраны две точки O и E и с ними сопоставлены числа 0 и 1 соответственно (рис. 457), то говорят, что на прямой задана *система координат*, а саму прямую называют *координатной прямой*, или *координатной осью*. Точку O называют *началом координат*, а отрезок OE — *единичным отрезком*. Соответствие между



Рис. 457

точками координатной прямой и действительными числами взаимно однозначное: каждой точке коорди-

натной прямой соответствует единственное действительное число, а каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой. Число x , которое соответствует точке A координатной прямой, называют *координатой* этой точки и записывают $A(x)$.

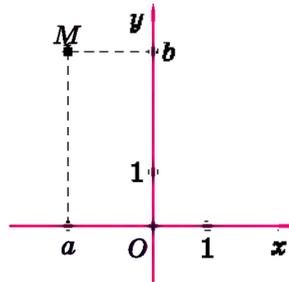


Рис. 458

Если на каждой из двух перпендикулярных прямых заданы системы координат с общим началом в точке O пересечения прямых (рис. 458), то говорят, что задана *система координат на плоскости*. Плоскость, на которой задана система координат, называется *координатной плоскостью*, одну из координатных прямых, обычно горизонтальную, называют *осью абсцисс*, другую — *осью ординат*. Соответствие между точками координатной плоскости и парами действительных чисел взаимно однозначное: каждой точке координатной плоскости соответствует единственная пара действительных чисел, а каждой паре действительных чисел соответствует единственная точка координатной плоскости. Числа a и b пары $(a; b)$, которая соответствует точке M координатной плоскости, называют *координатами* этой точки, причем первая координата называется *абсциссой*, вторая — *ординатой*. Это записывают $M(a; b)$.

Если имеются точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$, то расстояние между ними выражает число $|x_1 - x_2|$ (рис. 459), а если точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то число $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (рис. 460).

Графиком зависимости, связывающей переменные x и y , называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы и ординаты которых связаны этой зависимостью.

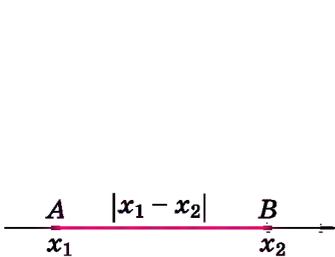


Рис. 459

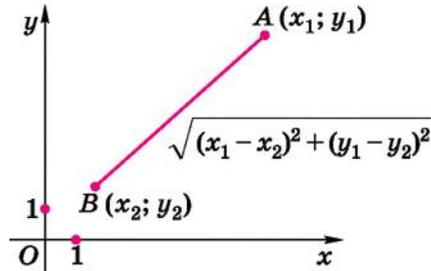


Рис. 460

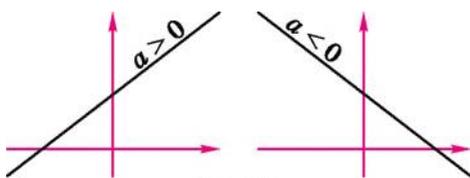


Рис. 461

Зависимость, задаваемая уравнением $y = ax + b$, называется *линейной функцией*. Ее графиком является прямая (рис. 461). Число a называют *угловым коэффициентом прямой*, которая является графиком функции $y = ax + b$. Частным случаем линейной функции является прямая пропорциональность $y = ax$. Пусть $M(x_0; y_0)$ — произвольная точка графика прямой пропорциональности $y = ax$ (рис. 462, а). Тогда $y_0 = ax_0$. Значит, $a = \frac{y_0}{x_0}$. Но $\frac{y_0}{x_0} = \operatorname{tg} \alpha$.

Поэтому $a = \operatorname{tg} \alpha$, т. е. угловой коэффициент a зависимости $y = ax$ равен тангенсу угла, который образует график этой зависимости с положительным направлением оси абсцисс. Рисунок 462, б показывает, что такой же смысл имеет и угловой коэффициент a линейной функции $y = ax + b$.

Зависимость, задаваемая уравнением $y = \frac{a}{x}$, называется *обратной пропорциональностью*. Ее графиком является гипербола (рис. 463). Число a называют *коэффициентом обратной пропорциональности*.

Функция, задаваемая уравнением $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется *квадратной функцией*. Ее графиком является парабола, вершина которой находится в точке $(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a})$. Эта парабола имеет осью симметрии прямую $x = -\frac{b}{2a}$, и ее ветви направлены вверх, если $a > 0$, или вниз, если $a < 0$ (рис. 464).

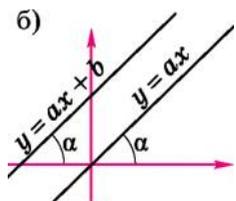
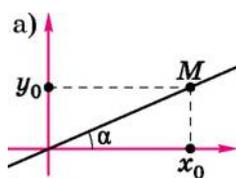


Рис. 462

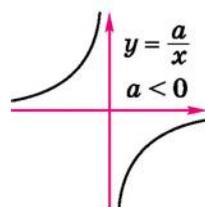
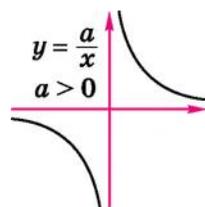


Рис. 463

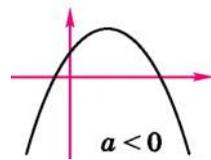
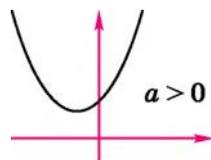


Рис. 464

1203. Найдите расстояние между точками координатной прямой:

- а) $A(3)$ и $B(13)$; д) $E(3,7)$ и $F(1,3)$;
б) $C(-3)$ и $B(13)$; е) $G(-13,9)$ и $H(13,9)$;
в) $A(3)$ и $D(-13)$; ж) $I\left(-3\frac{1}{7}\right)$ и $J\left(12\frac{2}{21}\right)$;
г) $C(-3)$ и $D(-13)$; з) $K\left(-7\frac{3}{15}\right)$ и $L\left(-9\frac{7}{18}\right)$.

1204. Найдите расстояние между точками координатной плоскости:

- а) $A(3; 6)$ и $B(13; -18)$;
б) $P(-3; 2)$ и $Q(13; 30)$;
в) $R(7; 30)$ и $S(-13; -18)$;
г) $U(-23; 67)$ и $V(-10; -17)$;
д) $E(37; -2)$ и $F(13; 30)$;
е) $G(39; 10)$ и $H(139; 115)$.

1205. Найдите стороны и площадь треугольника, вершины которого находятся в точках:

- а) $A(2; 3)$, $B(5; 7)$ и $C(-3; -8)$;
б) $D(-1; 4)$, $E(5; 12)$ и $F(-2; -12)$;
в) $G(-2; -5)$, $H(7; 35)$ и $I(0; 11)$;
г) $M(-4; -1)$, $N(8; 34)$ и $P(24; 4)$;
д) $Q(0; 11)$, $R(9; -29)$ и $S(1; 14)$;
е) $T(-1; -1)$, $U(10; 59)$ и $V(43; 15)$.

1206. Постройте график функции:

- а) $y = 3x$; в) $y = \frac{1}{3}x$; д) $y = \frac{3}{x}$; ж) $y = \frac{2}{3x}$;
б) $y = -3x$; г) $y = -\frac{1}{3}x$; е) $y = -\frac{3}{x}$; з) $y = \frac{-2}{3x}$.

1207. Постройте график функции:

- а) $y = 3x - 2$; д) $y = \frac{1}{3}x + 2$;
б) $y = -3x - 2$; е) $y = -\frac{1}{3}x + 2$;
в) $y = 3x + 2$; ж) $y = \frac{1}{3}x - 2$;
г) $y = -3x + 2$; з) $y = -\frac{1}{3}x - 2$.

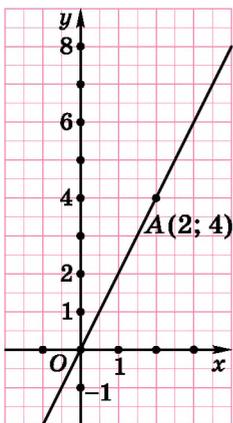


Рис. 465

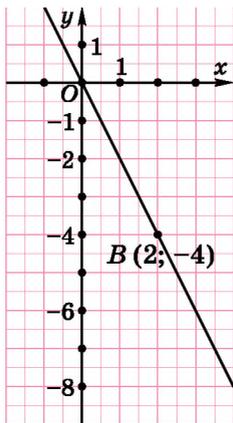


Рис. 466

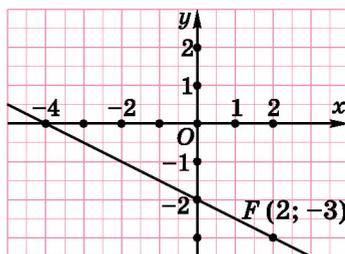


Рис. 470

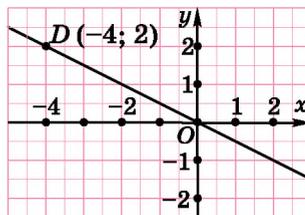


Рис. 468

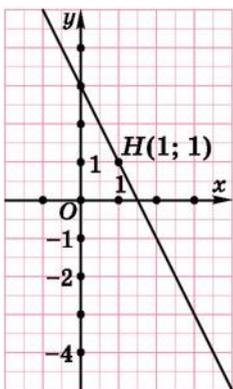


Рис. 472

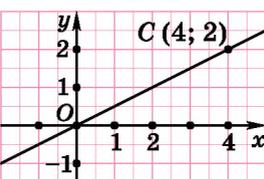


Рис. 467

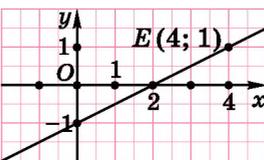


Рис. 469

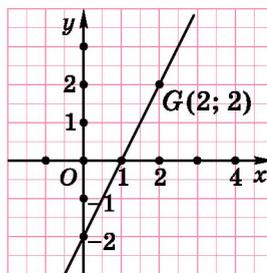


Рис. 471

1208. Запишите формулу, выражающую ту же зависимость, что и график, представленный на рисунке:

- а) 465; в) 467; д) 469; ж) 471;
 б) 466; г) 468; е) 470; з) 472.

1209. Постройте график функции:

- а) $y = x^2 - 6x$; и) $y = 2x^2 - 4x - 6$;
 б) $y = x^2 + 6x$; к) $y = -2x^2 + 4x - 6$;
 в) $y = x^2 - 2x - 8$; л) $y = x^2 + 4x + 3$;
 г) $y = x^2 + 2x - 8$; м) $y = -x^2 + 4x + 3$;
 д) $y = -x^2 - 4x - 5$; н) $y = x^2 - 4x + 3$;
 е) $y = -x^2 + 4x - 5$; о) $y = -x^2 + 4x - 3$;
 ж) $y = 3x^2 - 6x$; п) $y = 0,5x^2 - x - 1,5$;
 з) $y = -3x^2 - 6x$; р) $y = -0,5x^2 - x + 1,5$.

Геометрические фигуры и их свойства

Основное содержание школьной геометрии связано с соответствующими геометрическими конфигурациями — простейшими геометрическими фигурами или их сочетаниями.

Две прямые плоскости

Две прямые одной плоскости могут иметь общую точку или не иметь ее. В соответствии с этим две прямые плоскости либо *пересекаются*, либо *параллельны*.

Параллельные прямые разделяют плоскость на две полуплоскости и полосу (рис. 473).

Пересекающиеся прямые разделяют плоскость на четыре угла (рис. 474), которые объединяют в пары. Углы 1 и 2, которые имеют общую сторону, называют *смежными*, а углы 1 и 3, стороны каждого из которых являются продолжениями сторон другого угла, — *вертикальными*. Смежные углы вместе составляют 180° , а вертикальные углы равны друг другу.

Три прямые плоскости

Среди трех прямых a , b и c может не быть параллельных прямых (рис. 475) или такие прямые могут быть. Если есть параллельные прямые a и b , то третья прямая c может быть параллельной им (рис. 476) или пересекать их (рис. 477).

Свойства параллельных прямых.

Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то:

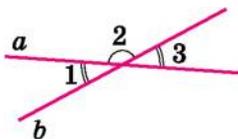
- соответственные углы равны;
- внутренние накрест лежащие углы равны;
- внутренние односторонние углы вместе составляют 180° .

Полу-
плоскость

Полоса

Полу-
плоскость

Рис. 473



$$\begin{aligned}\angle 1 + \angle 2 &= 180^\circ \\ \angle 1 &= \angle 3\end{aligned}$$

Рис. 474

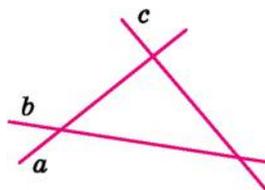
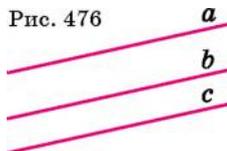


Рис. 475



Если $a \parallel b$ и $b \parallel c$,
то $a \parallel c$.

Если $a \parallel b$ и $a \parallel c$,
то $b \parallel c$.

Признаки параллельности прямых.

Прямые являются параллельными, если при пересечении их третьей прямой образуются:

- равные соответственные углы;
- равные внутренние накрест лежащие углы;
- внутренние односторонние углы, которые вместе составляют 180° .

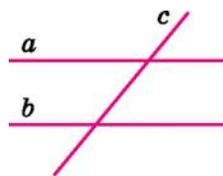


Рис. 477

Треугольник

Три попарно пересекающиеся прямые выделяют из плоскости треугольник (рис. 478). Стороны и углы треугольника называют его основными элементами. С треугольником связывают и другие элементы.

Внешний угол треугольника — угол, смежный с его внутренним углом (рис. 479).

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух его сторон (рис. 480).

Медиана треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны (рис. 481).

Биссектриса треугольника — отрезок биссектрисы угла треугольника, заключенный между его вершиной и противоположной стороной (рис. 482).

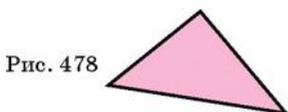


Рис. 478

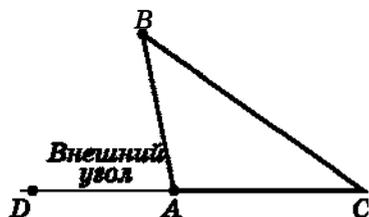


Рис. 479

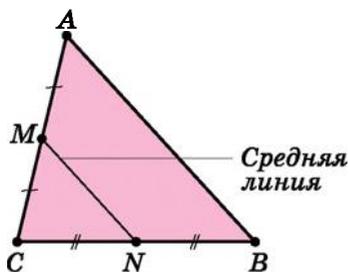


Рис. 480

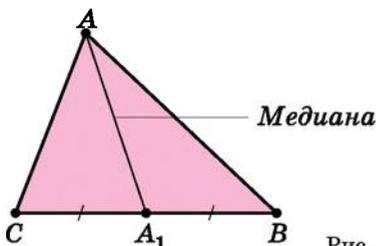


Рис. 481

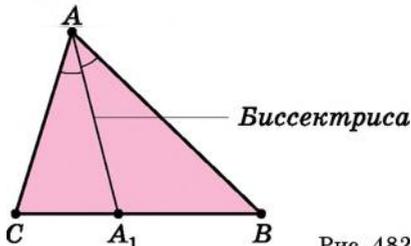
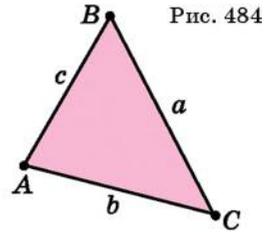
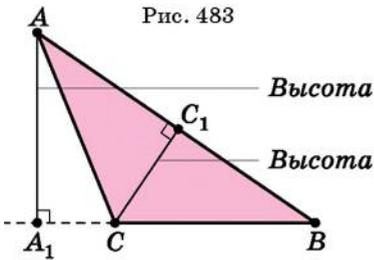


Рис. 482



Высота треугольника — перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, проходящую через его противоположающую сторону (рис. 483).

Треугольник (рис. 484) имеет такие *свойства*.

Свойства сторон и углов треугольника:

- сумма внутренних углов треугольника равна 180° : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$;
- каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон и больше их разности: $b - c < a < b + c$; $a - c < b < a + c$; $a - b < c < a + b$;
- большему углу соответствует большая противолежащая сторона: если $\angle C > \angle A$, то $c > a$;
- большей стороне соответствует больший противолежащий угол: если $c > a$, то $\angle C > \angle A$.

Свойство внешнего угла треугольника:

- внешний угол треугольника равен сумме двух его внутренних углов, не смежных с ним: $\angle BAD = \angle B + \angle C$.

Свойства средней линии треугольника:

- средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине: $MN \parallel AB$; $MN = \frac{1}{2} AB$.

Свойства медиан треугольника:

- медиана треугольника делит его на равновеликие части: $S_{CAA_1} = S_{BAA_1}$ (см. рис. 481);
- медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Свойство точки пересечения медиан треугольника:

- точка пересечения медиан треугольника делит каждую из них в отношении $2 : 1$, если считать от вершины: $AG = 2GA_1$, $BG = 2GB_1$, $CG = 2GC_1$ (рис. 485).

Свойства биссектрис треугольника:

- биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам: $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}$ (см. рис. 482).

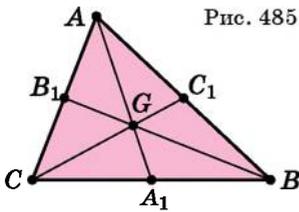


Рис. 485

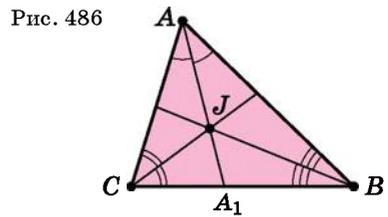


Рис. 486

• биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, равноотстоящей от сторон треугольника (рис. 486).

Свойство точки пересечения биссектрис треугольника:

• точка пересечения биссектрис треугольника делит каждую из них в отношении, первый компонент которого — сумма сторон, заключающих биссектрису, а второй — третья сторона: $\frac{AJ}{JA_1} = \frac{AB + AC}{BC}$ (см. рис. 486).

Прямоугольный треугольник

Два угла треугольника обязательно острые, а третий — больший — его угол может быть острым (рис. 487), прямым (рис. 488) или тупым (рис. 489). В соответствии с этим треугольники разделяют на *остроугольные*, *прямоугольные*, *тупоугольные*. Стороны, образующие прямой угол прямоугольного треугольника, называют *катетами*, а третью его сторону — *гипотенузой*.

Прямоугольный треугольник имеет такие свойства:

- острые углы вместе составляют 90° : $\angle A + \angle B = 90^\circ$;
- квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (*теорема Пифагора*): $AB^2 = AC^2 + BC^2$;
- если катет лежит против угла в 30° , то он равен половине гипотенузы;
- если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла в 30° ;

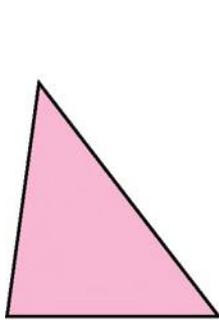


Рис. 487

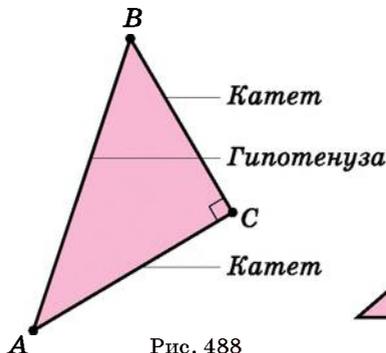


Рис. 488

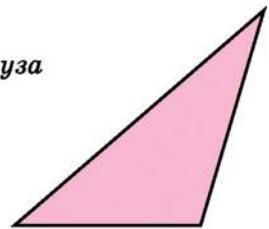
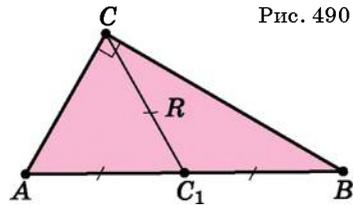


Рис. 489

- синус острого угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе: $\sin A = \frac{BC}{AB}$;
- косинус острого угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе: $\cos A = \frac{AC}{AB}$;
- тангенс острого угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему: $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$;
- котангенс острого угла равен отношению прилежащего катета к противолежащему: $\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}$.

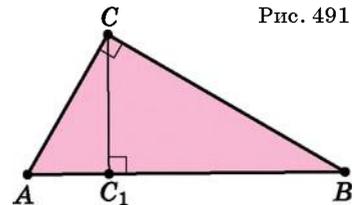
Свойство медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе:

- медиана прямоугольного треугольника, проведенная к его гипотенузе, равна половине этой гипотенузы: $CC_1 = AC_1 = BC_1$ (рис. 490).



Свойство высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе:

- высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, является средним геометрическим отрезков, на которые она разделяет гипотенузу, а катет является средним геометрическим гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу (рис. 491);



$$CC_1 = \sqrt{AC_1 \cdot BC_1}; \quad AC = \sqrt{AB \cdot AC_1}; \quad BC = \sqrt{AB \cdot BC_1}.$$

Признаки прямоугольного треугольника. Треугольник является прямоугольным, если:

- он имеет прямой угол;
- сумма двух каких-нибудь его углов равна 90° ;
- квадрат большей его стороны равен сумме квадратов двух других сторон;
- одна из его медиан равна половине стороны, к которой проведена.

Равнобедренный треугольник

Если треугольник имеет равные стороны, его называют *равнобедренным* (рис. 492). Равнобедренный треугольник с тремя равными сторонами называют *равносторонним* (рис. 493).

Равные стороны равнобедренного треугольника называют *боковыми сторонами*, а третью сторону — *основанием*.

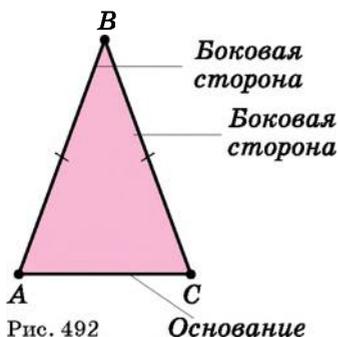


Рис. 492

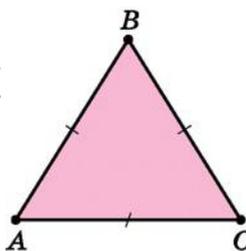


Рис. 493

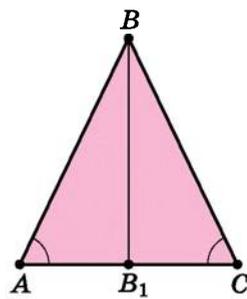


Рис. 494

Равнобедренный треугольник (рис. 494) имеет такие *свойства*.

Свойство углов равнобедренного треугольника:

• углы при основании равнобедренного треугольника равны: $\angle A = \angle C$.

Свойства медианы, высоты, биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенных к его основанию:

• медиана, биссектриса, высота равнобедренного треугольника, проведенные к его основанию, совпадают; если BB_1 — медиана, то BB_1 — биссектриса и высота; если BB_1 — биссектриса, то BB_1 — медиана и высота; если BB_1 — высота, то BB_1 — биссектриса и медиана.

Признаки равнобедренного треугольника. Треугольник является равнобедренным, если:

- две его стороны равны;
- два его угла равны;
- проведенные из одной вершины медиана и высота совпадают;
- проведенные из одной вершины медиана и биссектриса совпадают;
- проведенные из одной вершины высота и биссектриса совпадают.

Окружность и круг

Отношение длины C окружности к ее диаметру d есть постоянная величина для любой окружности. Это отношение представляется числом, которое обозначается π .

$$\pi = \frac{C}{d} \approx \frac{22}{7} \approx \frac{355}{113} \approx 3,141592\dots$$

Длина C окружности, площадь S соответствующего круга и их радиус r связаны формулами:

$$C = 2\pi r; S = \pi r^2; S = \frac{C}{2}r.$$

Четырехугольник

Плоская замкнутая четырехзвенная ломаная без самопересечений выделяет из плоскости *четыреугольник*. Четырехугольник на рисунке 495 — *выпуклый*, а на рисунке 496 — *невыпуклый*. Обычно рассматривают выпуклые четырехугольники.

Свойства четырехугольника:

- сумма внутренних углов его равна 360° ;
- середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма (рис. 497);
- из треугольников, на которые диагонали разделяют четырехугольник, произведение площадей треугольников, прилежащих к одной паре противоположных сторон, равно произведению площадей треугольников, прилежащих к другой паре противоположных сторон (рис. 498).

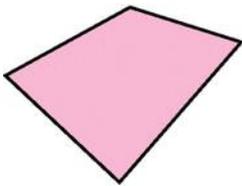


Рис. 495



Рис. 496

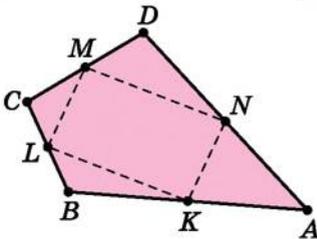
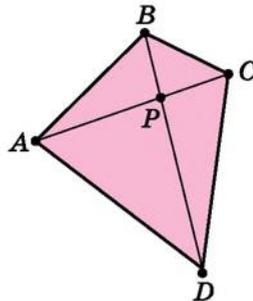


Рис. 497



$$S_{APD} \cdot S_{BPC} = S_{APB} \cdot S_{CPD}$$

Рис. 498

Трапеция

Трапеция — четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны. Параллельные стороны трапеции называют ее *основаниями*, а непараллельные — *боковыми сторонами* (рис. 499).

Свойства трапеции (рис. 500):

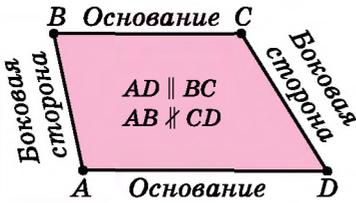


Рис. 499

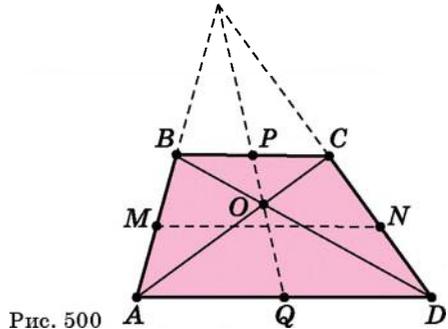


Рис. 500

- сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна 180° : $\angle A + \angle B = 180^\circ$; $\angle C + \angle D = 180^\circ$;
- средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме: $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$;
- прямая, проходящая через точку пересечения продолжений боковых сторон трапеции и точку пересечения диагоналей, делит основания трапеции пополам;
- из треугольников, на которые диагонали разделяют трапецию, треугольники, прилежащие к ее основаниям, — подобны, а треугольники, прилежащие к боковым сторонам, — равновелики: $\triangle AOD \sim \triangle COB$; $S_{AOB} = S_{DOC}$.

Четырехугольник имеет параллельные стороны, если:

- сумма углов, прилежащих к какой-нибудь стороне, равна 180° : $\angle A + \angle B = 180^\circ$, или $\angle B + \angle C = 180^\circ$, или $\angle C + \angle D = 180^\circ$, или $\angle D + \angle A = 180^\circ$;
- отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других его сторон: $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$ или $PQ = \frac{1}{2}(AB + CD)$;
- из четырех треугольников, на которые диагонали разделяют четырехугольник, два треугольника, прилежащие к противоположным сторонам, равновелики: $S_{AOB} = S_{DOC}$ или $S_{AOD} = S_{BOC}$.

Параллелограмм

Параллелограмм — четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (рис. 501).

Свойства параллелограмма (рис. 502):

- сумма углов, прилежащих к любой его стороне, равна 180° : $\angle A + \angle B = 180^\circ$ и $\angle B + \angle C = 180^\circ$ и $\angle C + \angle D = 180^\circ$ и $\angle D + \angle A = 180^\circ$;

- его противоположные стороны параллельны и равны: $AD \parallel BC$ и $AB \parallel CD$; $AD = BC$ и $AB = CD$;

- его противоположные углы равны: $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$;

- диагональ делит параллелограмм на равные треугольники: $\triangle ABC = \triangle ADC$; $\triangle ABD = \triangle DCB$;

- точка пересечения диагоналей делит их пополам: $AO = CO$; $BO = DO$.

- точка пересечения диагоналей является центром симметрии параллелограмма.

Признаки параллелограмма. Четырехугольник является параллелограммом, если:

- суммы углов, прилежащих к каким-нибудь двум смежным сторонам, равны 180° каждая: $\angle A + \angle B = 180^\circ$ и $\angle B + \angle C = 180^\circ$ или $\angle B + \angle C = 180^\circ$ и $\angle C + \angle D = 180^\circ$ или $\angle C + \angle D = 180^\circ$ и $\angle D + \angle A = 180^\circ$ или $\angle D + \angle A = 180^\circ$ и $\angle A + \angle B = 180^\circ$;

- его противоположные стороны параллельны: $AD \parallel BC$ и $AB \parallel CD$;

- его противоположные стороны равны: $AD = BC$ и $AB = CD$;

- он имеет пару противоположных параллельных и равных сторон: $AD \parallel BC$ и $AD = BC$ или $AB = CD$ и $AB \parallel CD$;

- его противоположные углы равны: $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$;

- его диагонали точкой пересечения делятся пополам: $AO = CO$ и $BO = DO$.

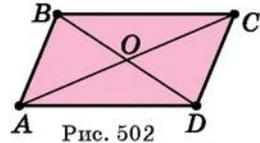
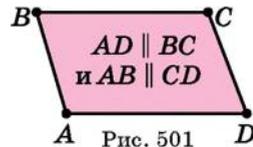
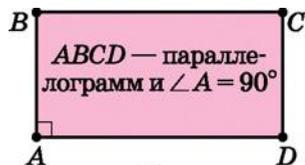


Рис. 503



Прямоугольник

Прямоугольник — параллелограмм, у которого имеется прямой угол (рис. 503).

Свойства прямоугольника (рис. 504):

- все его углы равны друг другу и прямые: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$;

- его диагонали равны: $AC = BD$;

- серединные перпендикуляры к его сторонам являются осями симметрии.

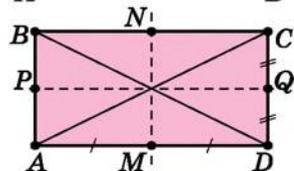


Рис. 504

Признаки прямоугольника. Параллелограмм является прямоугольником, если:

- его диагонали равны: $AC = BD$;
- серединный перпендикуляр к какой-либо стороне параллелограмма является его осью симметрии; MN — ось симметрии или PQ — ось симметрии.

Ромб

Ромб — параллелограмм, у которого имеются равные смежные стороны (рис. 505).

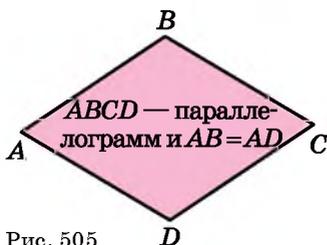


Рис. 505

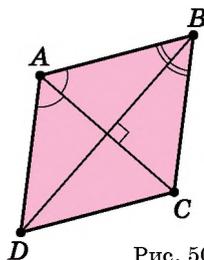


Рис. 506

Свойства ромба (рис. 506):

- все его стороны равны друг другу: $AB = BC = CD = DA$;
- его диагонали перпендикулярны: $AC \perp BD$;
- его диагонали делят углы пополам: $\angle ABD = \angle CBD$ и $\angle BAC = \angle DAC$;
- прямые, которым принадлежат его диагонали, являются осями симметрии.

Признаки ромба. Параллелограмм является ромбом, если:

- он имеет пару равных смежных сторон:

$$AB = BC \text{ или } BC = CD \text{ или } CD = DA \text{ или } DA = AB;$$

- его диагонали перпендикулярны: $AC \perp BD$;
- его диагонали делят углы пополам:

$$\angle ABD = \angle CBD \text{ и } \angle BAC = \angle DAC;$$

- прямые, которым принадлежат его диагонали, являются осями симметрии.

Квадрат

Квадрат — прямоугольник, у которого имеются равные смежные стороны, или ромб, у которого имеется прямой угол (рис. 507).

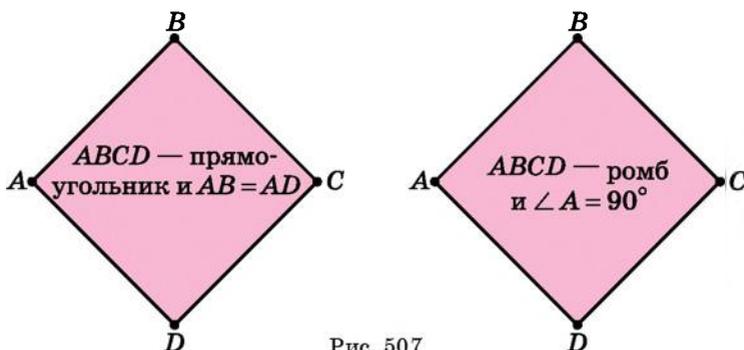


Рис. 507

Поскольку квадрат является и прямоугольником, и ромбом, то у него имеются все свойства прямоугольника и все свойства ромба.

Отношения между фигурами

Геометрические фигуры могут находиться в отношениях равенства и подобия.

Равные фигуры — фигуры, которые совпадают при наложении.

Признаки равенства треугольников. Треугольники являются равными, если у них соответственно равны:

- две стороны и угол между ними в одном — двум сторонам и углу между ними в другом;
- сторона и прилежащие к ней углы в одном — стороне и прилежащим к ней углам в другом;
- три стороны в одном — трем сторонам в другом.

Признаки равенства прямоугольных треугольников. Прямоугольные треугольники являются равными, если у них соответственно равны:

- катеты;
- катет и прилежащий к нему острый угол;
- гипотенуза и острый угол;
- гипотенуза и катет.

Теория подобия основывается на *теореме Фалеса*: если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, которые пересекают

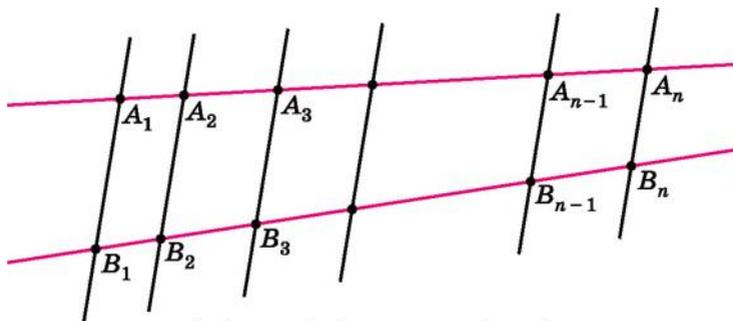


Рис. 508

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \dots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}.$$

другую сторону угла, то эти прямые на другой стороне пересекают также равные отрезки.

Истинна *обобщенная теорема Фалеса*: ряд параллельных прямых, которые пересекают две другие прямые, отсекают на них пропорциональные отрезки (рис. 508).

Подобные треугольники — треугольники, углы которых попарно равны, а соответственные стороны пропорциональны.

Признаки подобия треугольников. Треугольники являются подобными, если:

- у них есть по равному углу, а прилежащие к ним стороны пропорциональны;
- два угла в одном равны двум углам в другом;
- три стороны в одном пропорциональны трем сторонам в другом.

Отношение любых соответственных линейных элементов подобных фигур равно коэффициенту подобия. Отношение периметров подобных многоугольников равно коэффициенту подобия. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Отношение объемов подобных фигур-тел равно кубу коэффициента подобия.

1210. Докажите, что:

- а) средние линии треугольника разделяют его на четыре равных треугольника;
- б) медиана треугольника разделяет его на два равновеликих треугольника;
- в) медианы треугольника разделяют его на шесть равновеликих треугольников;

г) точка пересечения биссектрис треугольника разделяет каждую биссектрису в отношении, первый компонент которой есть сумма сторон, заключающих биссектрису, а второй — третья сторона.

1211. Верно ли, что два отрезка равны, если они являются:

- а) диагоналями равнобедренной трапеции;
- б) медианами равнобедренного треугольника;
- в) высотами параллелограмма;
- г) осесимметричными;
- д) высотами одной трапеции?

1212. Верно ли, что отрезок a больше отрезка b , если a и b являются соответственно:

- а) медианой и высотой треугольника, проведенными из одной вершины;
- б) биссектрисой и высотой треугольника, проведенными из одной вершины;
- в) большим основанием равнобедренной трапеции и ее диагональю;
- г) диаметром и хордой одного круга;
- д) боковой стороной равнобедренного треугольника и его основанием?

1213. Верно ли, что угол является прямым, если:

- а) он равен своему смежному углу;
- б) это один из углов треугольника со сторонами 10, 11 и 12;
- в) это угол между диагоналями ромба;
- г) его вершина отстоит на 3 см от центра окружности, а стороны проходят через концы одного диаметра;
- д) если он является углом треугольника и равен сумме двух других его углов?

1214. Учитывая, что одна сторона треугольника равна 1, другая — a , а угол между ними равен 30° , определите, верно ли, что если:

- а) третья сторона равна 0,8, то этот треугольник остроугольный;
- б) этот треугольник остроугольный, то он не равнобедренный;
- в) площадь треугольника равна 1, то этот треугольник тупоугольный;
- г) этот треугольник равнобедренный, то его периметр больше 3;
- д) этот треугольник прямоугольный, то его площадь больше 0,25.

1215. Определите, существует ли треугольник, у которого перпендикулярны:

- а) две медианы;
- б) две биссектрисы;
- г) медиана и биссектриса, проведенные из одной вершины;
- в) две высоты;
- д) два срединных перпендикуляра.

1216. Учитывая, что две стороны треугольника равны 10 и 20, определите, верно ли, что если:

- а) этот треугольник имеет ось симметрии, то его периметр равен 50;
- б) периметр этого треугольника равен 59, то он тупоугольный;
- в) угол между известными сторонами прямой, то медиана, проведенная к третьей стороне, больше 15;
- г) площадь этого треугольника равна 100, то он остроугольный;
- д) угол между известными сторонами равен 120° , то третья сторона равна $10\sqrt{7}$.

1217. Определите, существуют ли два таких равнобедренных треугольника, из которых можно составить:

- а) квадрат;
- б) прямоугольник с разными измерениями;
- в) ромб;
- г) трапецию;
- д) осесимметричный четырехугольник без параллельных сторон.

1218. Определите, верно ли, что треугольник является равнобедренным, если:

- а) две его высоты равны;
- б) биссектриса одного из углов делит его на две равновеликие части;
- в) равны две его средние линии;
- г) две его медианы равны;
- д) его средняя линия перпендикулярна одной из биссектрис.

1219. Учитывая, что сторона AB и угол C треугольника ABC соответственно равны 1 и 90° , установите, верно ли, что если:

- а) угол A больше 30° , то сторона BC больше $0,5$;
- б) периметр треугольника равен $2,2$, то медиана, проведенная к гипотенузе, равна $0,5$;
- в) площадь треугольника равна $0,25$, то он имеет ось симметрии;
- г) сторона AC меньше $0,6$, то сторона BC больше $0,9$;
- д) косинус одного из его углов равен синусу другого угла, то треугольник ABC является равнобедренным.

1220. Установите, верно ли, что треугольник является прямоугольным, если:

- а) его высоты пересекаются на стороне;
- б) одна из его сторон вдвое больше одной из медиан;
- в) квадрат одной из его сторон равен разности квадратов двух других сторон;
- г) синус одного из его углов равен косинусу другого угла;
- д) биссектриса делит сторону, к которой она проведена, на части, из которых одна равна этой биссектрисе, а другая вдвое меньше.

1221. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке Q , прямые, параллельные диагоналям параллелограмма, проведенные через точки A и D , пересекаются в точке P , а прямые AD и PQ пересекаются в точке O . Найдите длину отрезка OP , учитывая, что $AB = 6$.

1222. Определите, имеются ли такие точки P и Q квадрата $ABCD$ со стороной 1 , что:

- а) $PQ > 1$;
- б) $PQ > 1,5$;
- в) $AP = 1$, $CQ = 1$, $PQ = 1$;
- г) $PA < PC$, $QC > QD$, $PQ = 1,2$;
- д) $PA > PC$, $QC > QD$, $PQ < 0,1$.

1223. Определите, имеется ли такая точка M прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 1$ и $AD = 2$, что:

- а) $MA = 1$ и $\angle MAB = 45^\circ$;
- б) $MB = MC$ и $\angle BMC = 90^\circ$;
- в) $\angle AMB = \angle CMD$;
- г) $\angle AMD = \angle CMD$;
- д) $MB = MD$ и $\angle AMD < 90^\circ$.

1224. Докажите, что в параллелограмме:

- а) сумма расстояний от любой внутренней точки до прямых, содержащих стороны параллелограмма, есть величина постоянная;

- б) биссектриса внешнего угла вместе с продолжениями двух сторон, которые не имеют общих точек с проведенной биссектрисой, ограничивают равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной полупериметру параллелограмма;
- в) биссектрисы внешних углов ограничивают прямоугольник, диагональ которого равна сумме смежных сторон параллелограмма;
- г) биссектрисы внутренних углов ограничивают прямоугольник, диагональ которого равна разности смежных сторон параллелограмма;
- д) точки пересечения со сторонами биссектрис углов между диагоналями являются вершинами ромба.

1225. Докажите, что в четырехугольнике:

- а) сумма диагоналей меньше периметра;
- б) сумма диагоналей больше полупериметра;
- в) сумма диагоналей больше суммы двух противоположных сторон.

1226. Докажите, что:

- а) середины сторон равнобедренной трапеции являются вершинами ромба;
- б) если биссектрисы углов при одном из оснований трапеции пересекаются на другом ее основании, то это основание равно сумме боковых сторон трапеции;
- в) биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются под прямым углом на средней линии трапеции.

1227. Докажите, что:

- а) если выпуклый четырехугольник имеет равные диагонали и равные две противоположные стороны, то он является или равнобедренной трапецией, или прямоугольником;
- б) отрезок, соединяющий точки на разных основаниях трапеции, делится пополам ее средней линией;
- в) прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелограмма, разбивает его на две равные трапеции или на два равных параллелограмма.

1228. Стороны треугольника равны 11 см, 12 см и 13 см. Параллельно средней по величине стороне треугольника провели прямую, которая разделила периметр треугольника по-

полам. Определите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри треугольника.

1229. Через точку пересечения биссектрис равнобедренного треугольника провели прямую, параллельную его основанию. Учитывая, что отрезок этой прямой, заключенный внутри треугольника, равен 6 см, а периметр треугольника — 32 см, найдите стороны треугольника.

1230. Из вершины A параллелограмма опущены высоты AM и AN на стороны BC и CD . Найдите отрезки, на которые эти высоты разделяют диагональ BD длиной 28 см, учитывая, что $BM : MC = 3 : 8$ и $CN : ND = 3 : 2$.

1231. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M . На стороне CD выбрана такая точка N , что $MN \parallel BD$. Найдите стороны параллелограмма, учитывая, что $CM = m$ и $CN = n$.

1232. На катете BC и гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбраны соответственно такие точки M и N , что AM — биссектриса угла A и $MN \perp BC$. Учитывая, что $CM = 5$ см и $MN = 13$ см, найдите стороны треугольника ABC .

1233. Прямая, проходящая через точку пересечения биссектрис треугольника ABC , параллельна AC , пересекает стороны AB и BC в точках F и G соответственно. Найдите стороны AB и BC , учитывая, что $AC = b$, $AF = m$, $GC = n$.

1234. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки F и G соответственно так, что $FG \parallel AC$. Найдите отрезок AC , учитывая, что $AF + GC = m$, $BF + BG = n$ и $FG = a$.

1235. Биссектриса угла A при основании равнобедренного треугольника ABC делит боковую сторону в отношении $2 : 3$, если считать от вершины B . Через точку пересечения биссектрис параллельно основанию проведена прямая. Учитывая, что отрезок этой прямой, заключенный внутри треугольника, равен 30 см, найдите основание AC треугольника.

1236. На гипотенузе AB и катете BC прямоугольного треугольника ABC выбраны такие точки F и G соответственно, что отрезок CF — биссектриса и $AG \perp CF$. Найдите отрезки AF и BF , учитывая, что $AC = 42$ см и $BG = 14$ см.

1237. Биссектриса AP равнобедренного треугольника ABC делит медиану BM , проведенную к основанию, в отношении $5 : 3$, если считать от вершины. Найдите основание AC , учитывая, что $CP = 30$ см.

1238. Высота BP треугольника ABC делит биссектрису AF в отношении $3 : 2$ и сторону AC в отношении $6 : 7$, если считать от вершины A . Найдите стороны AC и BC , учитывая, что $AB = 42$ см.

1239. В треугольнике ABC проведена:

а) высота BH , а в треугольниках ABH и BHC — биссектрисы BF и BG . Найдите стороны треугольника ABC , учитывая, что $AF : FH = 5 : 3$, $CG = 26$ см и $GH = 10$ см;

б) биссектриса BM , а в треугольниках ABM и BMC — биссектрисы MP и MQ . Докажите, что $AP \cdot BM \cdot CQ = AQ \cdot CM \cdot BP$.

1240. В треугольнике ABC проведены биссектриса AP и медиана AM . Найдите BC , учитывая, что $PM = p$ и $AB : AC = b : c$.

1241. Диагональ равнобедренной трапеции делится биссектрисой острого угла в отношении $2 : 3$, а биссектрисой тупого угла — в отношении $5 : 6$, если считать от меньшего основания. Найдите стороны трапеции, учитывая, что ее средняя линия равна 70 мм.

1242. В равнобедренной трапеции с углом 60° биссектриса этого угла делит:

а) диагональ трапеции в отношении $4 : 11$, а меньшее основание — на части, которые отличаются на 30 см. Найдите стороны трапеции;

б) среднюю линию трапеции в отношении $4 : 11$, а меньшее основание — на части, которые отличаются на 20 см. Найдите среднюю линию трапеции.

1243. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AF и BG , которые пересекаются в точке Q . Найдите отношение $BQ : QG$, учитывая, что $AG = 8$ см, $CG = 12$ см и $CF = 10$ см.

1244. На стороне BC равнобедренного треугольника ABC с основанием AC , равным 30 см, выбрали такую точку F , что прямая AF делит медиану BM на части BQ и QM , соответственно равные 24 см и 8 см. Найдите длину отрезка AF .

1245. Найдите диагонали параллелограмма со сторонами a и b , учитывая, что его угол равен углу между диагоналями.

1246. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ отметили такую точку K , что $\angle CKD = 90^\circ$. Найдите отрезки, на которые точка K разделяет сторону AB , учитывая, что измерения прямоугольника равны 4 см и 10 см.

1247. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены такие точки G и F соответственно, что $\angle AFC = \angle BAC$ и $FG \parallel AC$. Найдите периметр треугольника AFG , учитывая, что $AB = 27$ см, $BC = 36$ см и $AC = 18$ см.

1248. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены такие точки G и F соответственно, что $\angle FAB = \angle BCG$. Докажите, что $\angle BFG = \angle BAC$.

1249. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены такие точки G и F соответственно, что $BF + FG = 18$ см и $BF : BG = BC : BA$. Найдите отрезок FG , учитывая, что $AC = 35$ см и $BC = 28$ см.

1250. В трапеции с боковыми сторонами 10 см и 15 см ее диагональ длиной 12 см является средним геометрическим оснований трапеции. Найдите эти основания.

1251. Основания трапеции равны 4 см и 9 см, а диагональ — 6 см. Найдите боковые стороны трапеции, учитывая, что они отличаются на 2,5 см.

1252. Стороны AB , BC и AC треугольника ABC соответственно равны 12 см, 18 см и 15 см. На них соответственно отмечены такие точки F , G и K , что $\angle BFG = \angle KGC$. Найдите отрезок FK , учитывая, что $KG = 8$ см и $GF = 12$ см.

1253. В треугольник ABC вписан такой параллелограмм с периметром 60 см, что один из его углов совпадает с A , а остальные вершины лежат на сторонах треугольника. Найдите диагональ параллелограмма, выходящую из вершины A , учитывая, что $AB = 26$ см, $BC = 52$ см и $AC = 39$ см.

1254. Биссектриса AF треугольника ABC разделяет его сторону BC на части длинами 8 см и 10 см. Найдите стороны AB и AC , учитывая, что они отличаются на 3 см.

1255. В треугольнике ABC проведена биссектриса AF и на стороне AB отмечена такая точка G , что $\angle BGC = \angle AFB$. Найдите стороны треугольника, учитывая, что $BF = b$, $CF = c$ и $BG = m$.

1256. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с периметром 64 см на большем основании AD и боковой стороне CD выбраны соответственно такие точки F и G , что $FG \parallel AC$, $DF = 18$ см, $DG = 12$ см. Учтывая, что прямая, проходящая через точку G и точку пересечения диагоналей, параллельна основаниям трапеции, найдите эти основания.

1257. Боковая сторона AB трапеции $ABCD$ равна a , а основания AD и BC — m и n соответственно. Найдите диагонали трапеции, учитывая, что они пересекаются в точке Q и $\angle A Q D = \angle A B C$.

1258. Имеется треугольник ABC со сторонами AB , BC и AC соответственно равными c , a и b . На продолжении стороны AC за точку C на расстоянии m от нее выбрана точка M , а на прямой AB — точка N так, что $\angle A M N = \angle A B C$. Найдите длины отрезков AN и MN .

1259. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC и боковой стороной BC , соответственно равными b и a , проведены высоты к боковым сторонам. Найдите расстояния между их основаниями.

1260. Медиана AM треугольника ABC делит высоту BD на части длинами 10 см и 14 см. Учтывая, что $AC = 63$ см, найдите стороны AB и BC .

Геометрические величины

В школьной математике изучают четыре величины — градусную меру угла, длину отрезка, площадь фигуры, объем тела.

Использование величины позволяет выразить определенным действительным числом результат сравнения геометрической фигуры Φ с фигурой, с которой сопоставлено число 1. Выбор фигуры-эталона означает выбор единицы измерения. Кроме основной единицы, используют и производные от нее, которые в метрической системе мер образуются единообразным образом с помощью приставок греческого происхождения. Значения употребительных приставок приводятся в следующей таблице.

Приставка	Обозначение	Множитель
гига	Г	10^9
мега	М	10^6
кило	к	10^3
гекто	г	10^2

Приставка	Обозначение	Множитель
деци	д	10^{-1}
сантиметры	с	10^{-2}
милли	м	10^{-3}
микро	мк	10^{-6}

Градусная мера угла

Два луча с общим началом разделяют плоскость на две части (рис. 509), каждую из которых вместе с лучами называют *углом*, сами лучи — *сторонами* угла, а их общее начало — *вершиной* угла. Угол обозначают знаком \sphericalangle .

Луч, исходящий из вершины угла и делящий его пополам, называют *биссектрисой угла* (рис. 510).

Угол, стороны которого являются противоположными лучами, называют *развернутым*, его стовосьмидесятую долю называют *градусом* и обозначают 1° . Градус является единицей измерения величины, которую называют *градусной мерой угла*.

Шестидесятую долю градуса называют *минутой*, шестидесятую долю минуты — *секундой*. Минуту обозначают знаком $'$, секунду — знаком $''$.

Угол, равный своему смежному углу, называют *прямым*. Угол, меньший прямого, называют *острым*, а угол, больший прямого и меньший развернутого, — *тупым*.

Сумма углов многоугольника, как выпуклого, так и невыпуклого, с количеством сторон n равна $180^\circ \cdot (n - 2)$.

Длина отрезка. Расстояние

Две точки прямой M и N разделяют ее на три части (рис. 511), которые вместе с точками M и N образуют луч с началом в точке M , луч с началом в точке N и *отрезок* MN . Если выбрать *единицу длины*, то можно измерить *длину отрезка*. В качестве единицы длины принят *метр*. С длиной отрезка связана другая величина — *расстояние*.



Рис. 511

Рис. 512

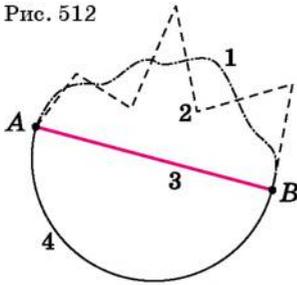


Рис. 513

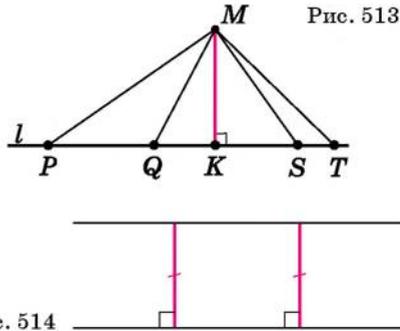


Рис. 514

Из точки A в точку B можно попасть разными путями (рис. 512). Кратчайшим из них является путь 3 по отрезку AB . *Расстоянием между точками* называется длина соединяющего их отрезка.

Наименьшим расстоянием от точки M до точек прямой l является расстояние до точки K — основания перпендикуляра MK (рис. 513). *Расстоянием между точкой и прямой* называется длина перпендикуляра, проведенного из точки на прямую.

Любые две точки одной из параллельных прямых равноотстоят от другой прямой (рис. 514). *Расстоянием между параллельными прямыми* называется расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой прямой.

Длина C окружности с радиусом R представляется формулой $C = 2\pi R$.

Площадь фигуры

Если выбрать *единицу площади*, то можно измерить *площадь фигуры*. В качестве единицы площади принят *квадратный метр*, под которым понимают площадь квадрата со стороной, равной 1 м.

Площадь *треугольника* (рис. 515) равна:

- половине произведения стороны и проведенной к ней высоты: $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$;
- произведению высоты треугольника и перпендикулярной ей средней линии: $S = h_a \cdot l_a$;

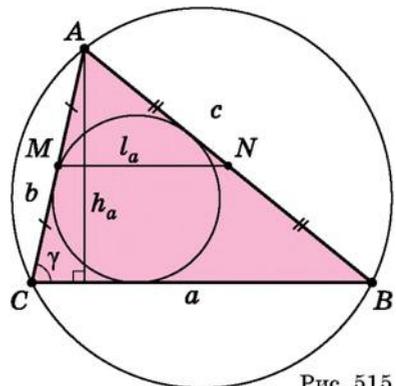


Рис. 515

Рис. 516

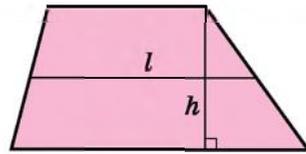
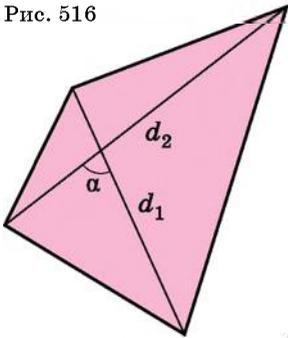


Рис. 517

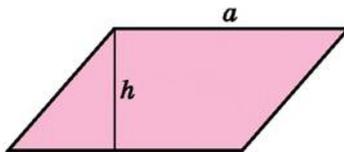


Рис. 518

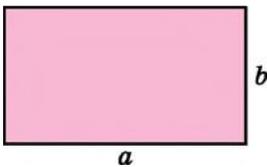


Рис. 519

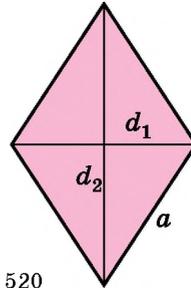


Рис. 520

• половине произведения двух его сторон и синуса угла между ними: $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$;

• квадратному корню из произведения полупериметра и трех разностей полупериметра с каждой стороной:

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c); S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Площадь четырехугольника (рис. 516) равна половине произведения его диагоналей и синуса угла между ними:

$$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha.$$

Площадь трапеции (рис. 517) равна произведению полусуммы ее оснований и высоты или произведению ее средней линии и высоты: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h = l \cdot h$.

Площадь параллелограмма (рис. 518) равна произведению стороны и проведенной к ней высоты:

$$S = a \cdot h.$$

Площадь прямоугольника (рис. 519) равна произведению его смежных сторон: $S = a \cdot b$.

Площадь ромба (рис. 520) равна половине произведения диагоналей: $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$.

Площадь круга с радиусом R выражается формулой $S = \pi R^2$.

Объем тела

Если выбрать *единицу объема*, то можно измерить *объем тела*. В качестве единицы объема принят *кубический метр*, под которым понимают объем куба со стороной, равной 1 м.

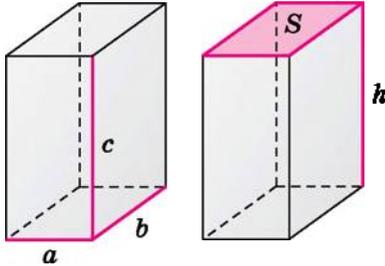


Рис. 521

Объем прямоугольного параллелепипеда (рис. 521) равен:

- произведению трех его измерений:

$$V = abc;$$

- произведению площади его основания и высоты:

$$V = Sh.$$

1261. На отрезке AB выбрана внутренняя точка C . Найдите отрезки CA и CB , учитывая, что:

- отрезок AB равен 28 см, а отрезок CA на 10 см длиннее отрезка CB ;
- отрезок AB равен 30 см, а отрезок CA относится к отрезку CB как 3 : 7;
- отрезок CA относится к отрезку CB как 3 : 5 и длиннее отрезка CB на 8 см;
- отрезок AB равен 56 см, а отрезок CA составляет 75 % отрезка CB ;
- отрезок CA составляет 125 % отрезка CB и длиннее отрезка CB на 7 см.

1262. Найдите углы треугольника ABC , учитывая, что:

- угол B на 45° больше угла A и на 30° меньше угла C ;
- угол B на 45° больше угла A и на 30° больше угла C ;
- угол B на 45° меньше угла A и на 30° больше угла C ;
- угол B на 20° меньше угла A и составляет $2\frac{1}{6}$ угла C ;
- угол B на 24° меньше угла A и составляет 112,5 % угла C .

1263. Найдите расстояние от вершины C прямого угла до гипотенузы прямоугольного треугольника ABC , учитывая, что его:

- катеты CA и CB соответственно равны 11 и 60;
- катеты CA и CB соответственно равны 19 и 180;
- катет CA и гипотенуза AB соответственно равны 84 и 85;
- катет CA и гипотенуза AB соответственно равны 77 и 85.

1264. Учитывая, что основания AD и BC равнобедренной трапеции $ABCD$ равны соответственно 5 и 1, установите, истинно ли утверждение:

- а) точка пересечения диагоналей является центром симметрии трапеции;
- б) если сторона AB равна 3, то периметр трапеции равен 12;
- в) если угол A больше 45° , то высота трапеции больше 3;
- г) площадь треугольника, ограниченного боковой стороной и диагоналями, составляет $\frac{5}{36}$ площади трапеции;
- д) если диагонали AC и AD равны, то площадь трапеции равна 12.

1265. Найдите длину отрезка BD , соединяющего вершину B треугольника ABC с точкой D на стороне AC , учитывая, что периметр треугольника ABC равен 20 см, а периметры треугольников ABD и BCD — 12 см и 16 см.

1266. Точка Q делит отрезок длиной 30 см в отношении $\frac{2}{7} : \frac{4}{21}$. Найдите расстояние от точки Q до середины отрезка.

1267. Отрезок делится точкой M в отношении 5 : 7, а точкой N — в отношении 7 : 11. Найдите длину отрезка, учитывая, что расстояние между точками M и N равно 24 см.

1268. На отрезке AB отметили такую точку C , что $AC = \frac{14}{19}AB$, а на отрезке AC — такую точку D , что $CD = 1,5BC$. Учитывая, что $AD = 26$ см, найдите длины полученных частей.

1269. Отрезок разделен на четыре части в отношении 2 : 3 : 4 : 5. Учитывая, что расстояние между серединами крайних частей равно 95 мм, найдите расстояние между серединами двух остальных частей.

1270. Отрезок длиной 30 см разделен на четыре неравные части. Учитывая, что расстояние между серединами крайних частей равно 24 см, найдите расстояние между серединами двух остальных частей.

1271. Луч, проведенный из вершины угла, разделил его на две части. Учитывая, что одна из частей величиной 35° составляет $\frac{7}{12}$ другой части, найдите величину всего угла.

1272. Из точки Q на прямой AB в одной полуплоскости провели два луча QM и QN так, что угол MQA составляет $\frac{5}{8}$ угла MQN и меньше его на 30° . Найдите величины углов, на которые лучи разбили полуплоскость.

1273. Из точки O на прямой MN в одной полуплоскости провели два луча OA и OB так, что $\angle MOA = 2\angle AOB$, а $\angle AOB - \angle BON = 12^\circ$. Найдите величины углов, на которые лучи разбили полуплоскость.

1274. В равнобедренном треугольнике ABC с периметром 21 см провели медианы AM и BN к боковым сторонам. Найдите стороны треугольника, учитывая, что периметр треугольника ACM на 3 см больше периметра треугольника ABN .

1275. В прямоугольном треугольнике ABC с периметром 39 см провели медиану AM к гипотенузе. Найдите длину отрезка AC , учитывая, что периметр треугольника BAM равен 24 см.

1276. В треугольнике ABC из середины стороны AB возвели перпендикуляр до пересечения со стороной BC в точке N . Найдите периметр треугольника ABC , учитывая, что периметр треугольника CAN равен 29 см и $AB = 11$ см.

1277. Докажите, что площади треугольников, которые имеют:

- общую высоту, относятся как стороны, к которым проведена эта высота;
- общее основание, относятся как высоты, проведенные к этому основанию.

1278. Три прямые, проведенные из одной вершины, разделите на три равновеликие части:

- данный треугольник;
- данный параллелограмм.

1279. Диагональ трапеции делит ее на два треугольника, площади которых относятся как $3 : 7$. Определите, в каком отношении средняя линия делит площадь трапеции.

1280. Длина боковой стороны трапеции равна a , а расстояние до этой стороны от середины противоположной стороны равно b . Найдите площадь этой трапеции.

1281. Точка K делит сторону AC треугольника ABC в отношении $m : n$. Докажите, что для любой точки L на прямой BK площади треугольников ALK и CLK относятся как $m : n$.

1282. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC выбраны такие точки M и N , что прямая MN параллельна высоте BK . Найдите длину отрезка MN , учитывая, что он делит треугольник на две равновеликие части, а высота BK , равная 7, делит сторону AC в отношении $7 : 2$.

1283. Площадь прямоугольного треугольника равна 180 см^2 . Найдите катеты этого треугольника, учитывая, что они отличаются на 31 см.

1284. Два равных прямоугольника, имеющих общий угол и квадратную общую часть, закрывают вместе площадь в 30 м^2 . Найдите измерения прямоугольника, учитывая, что его периметр равен 21 м.

1285. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 параллелограмма $ABCD$ являются серединами сторон CD, DA, AB, BC соответственно. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного прямыми AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 , учитывая, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна 35 см^2 .

1286. Через точку пересечения медиан равнобедренного треугольника провели прямую, параллельную основанию треугольника. Учитывая, что отрезок этой прямой, заключенный внутри треугольника, равен 4 см, а периметр треугольника составляет 16 см, найдите высоты треугольника.

1287. Биссектриса AN и медиана BM треугольника ABC пересекаются в точке Q . Прямая, проходящая через точку Q параллельно стороне AC , пересекает стороны AB и BC в точках F и G соответственно. Учитывая, что $AF = 10$ см, $GC = 6$ см, $AC = 28$ см, найдите площадь треугольника ABC .

1288. К основанию равнобедренного треугольника ABC проведена медиана BM . Окружность с центром B и радиусом BM пересекает боковые стороны треугольника в точках F и G . Учитывая, что расстояние между прямыми AC и FG равно 4 см и $FG = 24$ см, найдите периметр треугольника ABC .

1289. Прямая, проходящая через точку пересечения медиан треугольника ABC параллельно стороне AC , пересекает стороны AB и BC в точках F и G соответственно. Найдите дли-

ну отрезка FG , учитывая, что периметр треугольника ABC равен 150 мм, $AF + GC = 32$ мм.

1290. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны такие точки F и G соответственно, что отрезок BF равен высоте BH треугольника и $FG \parallel AC$. Найдите площадь треугольника ABC , учитывая, что $AF = 1$ см, $GC = 1,7$ см и расстояние между прямыми AC и FG равно 0,8 см.

1291. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны такие точки F и G соответственно, что отрезки BF и BG равны высоте BH треугольника. Прямые, проведенные через точки F и G параллельно стороне AC , пересекают стороны BC и AB соответственно в точках F_1 и G_1 . Найдите периметр и площадь треугольника ABC , учитывая, что $FG_1 = 24$ мм, $GF_1 = 18$ мм и расстояние между прямыми FF_1 и GG_1 равно 12 мм.

1292. Биссектриса острого угла равнобедренной трапеции делит боковую сторону на части длиной 10 см и 15 см, если считать от меньшего основания трапеции. Найдите площадь трапеции, учитывая, что ее меньшее основание равно 3 см.

1293. Биссектриса угла A при основании AC равнобедренного треугольника ABC делит боковую сторону в отношении $5 : 8$, если считать от вершины B . Средняя линия треугольника, параллельная основанию, делится этой биссектрисой на части, разность которых равна 18 см. Найдите периметр треугольника.

1294. На сторонах AC и BC треугольника ABC выбраны такие точки F и G соответственно, что отрезок FG параллелен стороне AB , проходит через точку Q пересечения биссектрис и делится этой точкой в отношении $3 : 2$. Найдите периметр и площадь треугольника ABC , учитывая, что сторона AC делится биссектрисой на части AK и KC , соответственно равные 25 см и 20 см.

1295. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены такие точки G и F соответственно, что $\angle AFC = \angle BAC$ и $FG \parallel AC$. Найдите периметр треугольника AFG , учитывая, что $AB = 27$ см, $BC = 36$ см и $AC = 18$ см.

1296. Перпендикуляр, опущенный из вершины острого угла равнобедренной трапеции на противоположащую боковую сторону, делит ее на отрезки длиной 12 см и 3 см, если считать от большего основания. Учитывая, что это основание равно 20 см, найдите площадь трапеции.

1297. К основанию равнобедренного треугольника ABC проведена медиана BG , а к боковой стороне — высота AF .

Учитывая, что $BG : AF = 5 : 6$ и $FG = 30$ см, найдите периметр треугольника ABC .

1298. Диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярна ее боковой стороне CD и делит высоту BH на отрезки длиной 27 см и 21 см, если считать от большего основания. Найдите площадь трапеции.

1299. На сторонах AC и BC треугольника ABC выбраны соответственно точки M и N , прямые AN и BM пересекаются в точке Q . Определите стороны AC и BC , учитывая, что $AQ = 36$ см, $QN = 9$ см, $BQ = QM = 18$ см и $BN = 12$ см.

1300. Отрезок длиной 42 см, соединяющий точки на боковых сторонах равнобедренного треугольника, проходит через точку пересечения высот и параллелен основанию. Определите боковую сторону треугольника, учитывая, что его основание равно 96 см.

1301. Основания трапеции равны a и b . Найдите длину отрезка, который параллелен основаниям трапеции и делит ее на две подобные друг другу трапеции.

1302. В четырехугольнике $ABCD$ с периметром 84 см диагонали пересекаются в точке Q . Найдите периметр четырехугольника, вершины которого делят отрезки QA, QB, QC, QD в отношении 3 : 1, если считать от точки Q .

1303. Прямая делит прямоугольник на два подобных друг другу прямоугольника с диагоналями 15 см и 20 см. Найдите стороны исходного прямоугольника.

Геометрические построения линейкой и циркулем

В геометрии важную роль играют построения с использованием только двух инструментов — односторонней геометрической линейки без делений и циркуля.

С помощью *геометрической линейки* можно провести:

- прямую через две данные точки;
- луч, начинающийся в данной точке и проходящий через другую данную точку;
- отрезок, соединяющий две данные точки;
- произвольную прямую;
- произвольный луч;
- произвольный отрезок.

С помощью *циркуля* можно:

- отметить две точки R и S , расстояние между которыми равно данному отрезку AB ;

- построить окружность с центром в выбранной точке и радиусом, равным данному отрезку;

- построить произвольную окружность.

Это есть *элементарные построения*, которые можно выполнить линейкой или циркулем. Их сочетание позволяет проводить более сложные построения.

Решить задачу на построение с помощью циркуля и линейки означает свести ее к последовательному выполнению элементарных построений, каждое из которых можно выполнить циркулем или геометрической линейкой. Обычно построение нужной фигуры сводят к так называемым *основным построениям*:

- построение отрезка, равного данному отрезку;
- построение угла, равного данному углу;
- построение треугольника, равного данному треугольнику;
- построение треугольника, стороны которого равны трем данным отрезкам;

- построение треугольника, сторона которого равна данному отрезку, а прилежащие к стороне углы — двум данным углам;

- построение треугольника, угол которого равен данному углу, а прилежащие к нему стороны — двум данным отрезкам;

- построение середины данного отрезка;
- построение биссектрисы данного угла;
- построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой;

- построение прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой;

- построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и острому углу;

- построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету;

- деление данного отрезка на n отрезков-долей;

- деление данного отрезка в данном отношении $m : n$.

1304. С помощью геометрической линейки и циркуля постройте угол величиной:

а) 60° ; б) 30° ; в) 45° ; г) $22^\circ 30'$.

1305. Постройте треугольник, у которого:

а) одна сторона и проведенная к ней высота равны двум данным отрезкам, а угол, прилежащий к этой стороне, равен данному углу;

- б) сторона, проведенные к ней медиана и высота равны трем данным отрезкам;
- в) сторона, проведенная к ней медиана и угол между этой медианой и высотой, проведенной к этой стороне, равны данным двум отрезкам и углу;
- г) две стороны и высота, проведенная к одной из них, равны трем данным отрезкам.

1306. Постройте четырехугольник $ABCD$ (рис. 522), у которого его три стороны:

- а) и обе диагонали равны пяти данным отрезкам;
- б) a , b и d , два угла A и B равны данным трем отрезкам и двум данным углам;
- в) a , b и c , два угла A и B равны данным трем отрезкам и двум данным углам.

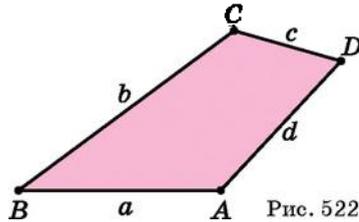


Рис. 522

1307. Постройте трапецию, у которой:

- а) основание, боковая сторона и углы, прилежащие к другому основанию, равны данным двум отрезкам и двум углам;
- б) основание, высота и углы, прилежащие к основанию, равны данным двум отрезкам и двум углам;
- в) основание, высота и противолежащие углы равны данным двум отрезкам и двум углам.

1308. Постройте треугольник по:

- а) его стороне и отношению $a : b : c$ всех его сторон;
- б) сумме его двух сторон, разности этих сторон и углу против третьей стороны;
- в) его высоте, углу при стороне, к которой проведена высота, и отношению двух других сторон;
- г) периметру, углу и отношению сторон, образующих этот угол.

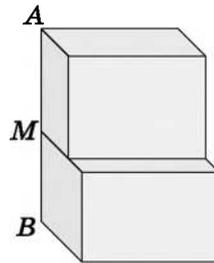
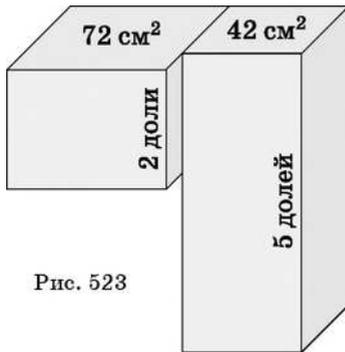
1309. Постройте треугольник, который равновелик одному и подобен другому из двух данных треугольников.

1310. Постройте квадрат:

- а) площадь которого составляет четыре площади данного квадрата;
- б) равновеликий данному прямоугольнику;
- в) равновеликий данному параллелограмму;
- г) равновеликий данному треугольнику.

Текстовые задачи

1311. Имеются два прямоугольных параллелепипеда (рис. 523), у первого площадь основания равна 72 см^2 , у второго — 42 см^2 , а их высоты относятся как $2 : 5$. Найдите объемы параллелепипедов, учитывая, что объем второго параллелепипеда на 198 см^3 больше.



1312. Отрезок AB длиной 15 м точкой M разделен на два таких отрезка, что $AM - BM = 1 \text{ м}$. На полученных частях AM и BM как на высотах построены прямоугольные параллелепипеды, площади оснований которых относятся как $8 : 9$, а объем первого параллелепипеда на 6 м^3 больше (рис. 524). Найдите объемы параллелепипедов.

1313. При изменении высоты тела массой 200 кг на 220 м изменение его потенциальной энергии на Сатурне на 381 кДж больше изменения потенциальной энергии этого тела при изменении его высоты на 300 м на спутнике Сатурна Титане. Учитывая, что ускорения свободного падения на Сатурне и на Титане относятся как $70 : 9$, найдите эти ускорения и изменения потенциальной энергии.

1314. Имеются два прямоугольных параллелепипеда (рис. 525), у первого площадь основания равна 30 см^2 , у второго — 21 см^2 . Высота и объем второго параллелепипеда больше соответствующих величин первого на 4 см и на 12 см^3 . Найдите объемы параллелепипедов.

1315. На отрезке CD длиной 18 дм выбрали такую точку N , что $ND - NC = 2 \text{ дм}$. На полученных частях NC и ND как на высотах построены такие прямоугольные параллелепипеды, что объем первого из них на 406 дм^3 меньше (рис. 526). Учти-

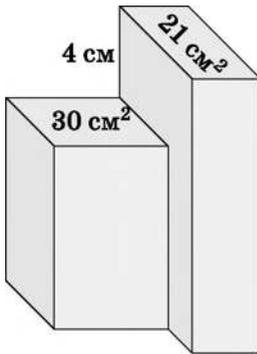


Рис. 525

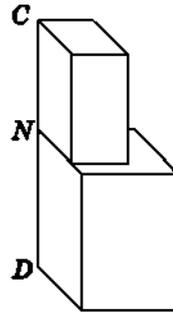


Рис. 526

тая, что площадь основания первого параллелепипеда на 35 дм^2 меньше, найдите объемы параллелепипедов.

1316. К коротким плечам двух рычагов, представленных на рисунке 527, подвешены одинаковые грузы P_1 и P_2 весом 1200 Н . Приложив силы F_1 и F_2 в 360 Н и 500 Н к длинным плечам верхнего и нижнего рычагов соответственно, эти грузы подняли на такие высоты h_1 и h_2 , что $h_2 - h_1 = 0,13 \text{ м}$, а точки приложения сил F_1 и F_2 поднялись на высоты H_1 и H_2 , соответственно равные $0,5 \text{ м}$ и $0,8 \text{ м}$. Найдите коэффициенты η_1 и η_2 полезного действия рычагов на верхнем и нижнем рисунках, учитывая, что $\eta_1 - \eta_2 = 5 \%$, и то, что полезная работа A_n , выполненная работа A_b и коэффициент η полезного действия механизма, с помощью которого выполнялась работа, связаны зависимостью $A_n = \eta \cdot A_b$.

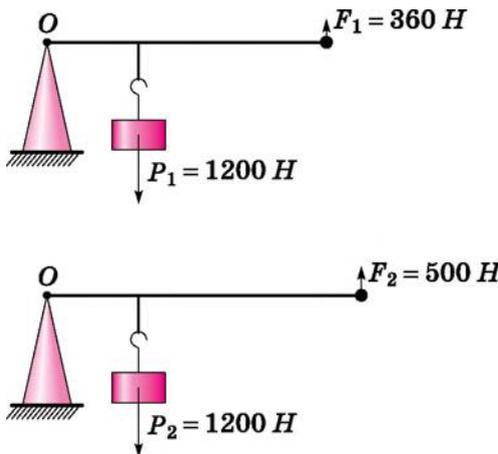


Рис. 527

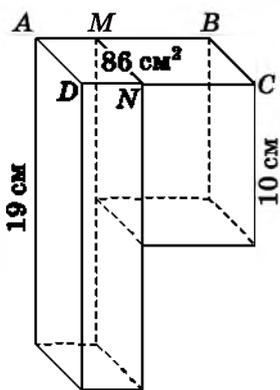


Рис. 528

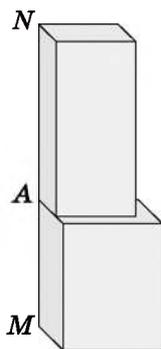


Рис. 529

1317. Прямоугольник $ABCD$ с площадью 86 см^2 отрезком MN разделен на два прямоугольника $AMND$ и $BMNC$ (рис. 528), на которых как на основаниях построены прямоугольные параллелепипеды с высотами 10 см и 19 см . Найдите объемы параллелепипедов, учитывая, что объем второго параллелепипеда на 10 см^3 больше.

1318. Отрезок MN длиной 31 см точкой A разделен на два отрезка AM и AN (рис. 529), на которых как на высотах построены прямоугольные параллелепипеды с площадями 70 см^2 и 40 см^2 . Найдите объемы параллелепипедов, учитывая, что объем второго параллелепипеда на 190 см^3 меньше.

1319. Имеются два бруска в форме прямоугольного параллелепипеда: один латунный, другой бронзовый — которые вместе имеют массу, равную 1476 г . Найдите по отдельности массы латунного и бронзового брусков, учитывая, что их объемы относятся как $2:3$, плотности латуни и бронзы соответственно равны $8,5 \text{ г/см}^3$ и 8 г/см^3 , а масса m предмета, плотность ρ вещества, из которого предмет сделан, и объем V пред-

мета связаны зависимостью $m = \rho \cdot V$.

1320. Имеются два бруска в форме прямоугольного параллелепипеда: один еловый размерами $2 \text{ см} \times 5 \text{ см} \times 120 \text{ см}$, другой березовый размерами $3 \text{ см} \times 4 \text{ см} \times 110 \text{ см}$, которые вместе имеют массу, равную 1350 г . Учитывая, что плотности ели и березы относятся как $7:5$, найдите:

- по отдельности массы брусков;
- плотности ели и березы.

1321. Два бруска в форме прямоугольного параллелепипеда — дубовый и осиновый — вместе имеют массу, равную 1620 г . Объем осинового бруска на 400 см^3 больше, а плотности дуба и осины соответственно равны $0,69 \text{ г/см}^3$ и $0,495 \text{ г/см}^3$. Найдите:

- по отдельности массы брусков;
- размеры дубового бруска, учитывая, что ширина составляет $0,6$ длины, а высота больше длины в 16 раз;

в) размеры осинового бруска, учитывая, что длина и ширина одинаковые, а высота больше длины в 25 раз.

1322. Два бруска в форме прямоугольного параллелепипеда — грушевый объемом 400 см^3 и вишневый объемом 900 м^3 — вместе имеют массу, равную 833 г . Найдите:

а) по отдельности массы брусков, учитывая, что плотность груши на $0,1 \text{ г/см}^3$ больше плотности вишни;

б) размеры грушевого бруска, учитывая, что ширина составляет $0,5$ длины, а высота больше длины в $12,5$ раза;

в) размеры вишневого бруска, учитывая, что ширина составляет 75% длины, а высота — 2500% ширины.

1323. Имеется рычаг, плечи которого l_1 и l_2 равны $0,6 \text{ м}$ и 1 м соответственно (рис. 530). К концам рычага приложены такие силы F_1 и F_2 , что $F_1 - F_2 = 150 \text{ Н}$ и их моменты вместе составляют $410 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Определите, на какой высоте будет находиться один из концов рычага, если другой его конец при повороте упрется в землю, учитывая, что точка O опоры рычага отстоит от земли на 50 см , а сила F , ее плечо l и момент M связаны зависимостью $M = F \cdot l$.

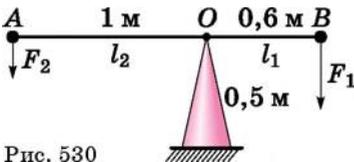


Рис. 530

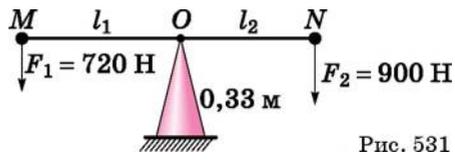


Рис. 531

1324. Имеется рычаг с концами M и N , плечи которого l_1 и l_2 такие, что $l_1 - l_2 = 0,1 \text{ м}$ (рис. 531). К концам рычага M и N приложены силы F_1 и F_2 , соответственно равные 720 Н и 900 Н , и их моменты вместе составляют $963 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Определите, на какой высоте будет находиться один из концов рычага, если другой его конец при повороте упрется в землю, учитывая, что точка O опоры рычага отстоит от земли на 33 см .

1325. Два бруска в форме прямоугольного параллелепипеда — ольховый объемом 1640 см^3 и рябиновый объемом 600 см^3 — вместе имеют массу, равную 1218 г . Найдите:

а) по отдельности массы брусков, учитывая, что плотности ольхи и рябины вместе составляют $1,12 \text{ г/см}^3$;

б) размеры ольхового бруска, учитывая, что ширина составляет 80% длины, а высота больше длины в $16,4$ раза;

в) размеры рябинового бруска, учитывая, что ширина в два раза меньше длины, а высота составляет 1875% длины.

1326. Два бруска в форме прямоугольного параллелепипеда — каштановый и кленовый — имеют общий объем, равный 4300 см^3 , и общую массу, равную 2508 г . Найдите:

- а) по отдельности массы брусков, учитывая, что плотности каштана и клена соответственно равны $0,52 \text{ г/см}^3$ и $0,69 \text{ г/см}^3$;
б) размеры каштанового бруска, учитывая, что в сравнении с шириной длина в $1,2$ раза больше, а высота составляет 1800% ;
в) размеры кленового бруска, учитывая, что ширина составляет 80% длины, а высота — в 20 раз больше ширины.

1327. Антон поднял груз на высоту 18 м , Иван на 20 Н меньший груз на высоту 21 м . Определите выполненные ими работы, учитывая, что они относятся как $36 : 35$, а работа A , выполненная силой F на пути s , определяется формулой $A = F \cdot s$.

1328. Маша, масса которой равна 55 кг , и Дима, масса которого составляет 65 кг , поднялись на разные этажи одного и того же дома, причем Дима поднялся на два этажа выше. Определите, какие работы выполнили они против силы тяжести, учитывая, что эти работы относятся как $33 : 52$, и принимая высоту этажа равной $3,5 \text{ м}$, а ускорение свободного падения — $9,8 \text{ м/с}^2$.

1329. Наибольшая глубина пресного озера Нарочь (Беларусь) на 9 м больше наибольшей глубины соленого озера Урмия (Иран), а плотности воды в самых глубоких местах названных озер составляют 1000 кг/м^3 и 1175 кг/м^3 соответственно. Найдите давления воды в этих местах Нарочи и Урмии, учитывая, что первое из них составляет $75,2 \%$ второго, а также то, что плотность ρ жидкости, глубина h погружения и давление P жидкости связаны зависимостью $P = \rho gh$, где g — ускорение свободного падения. Значение величины g примите равным $9,8 \text{ м/с}^2$.

1330. Плотность воды в озере Мона (США) на 300 кг/м^3 меньше плотности воды в Мертвом море (Ближний Восток), а наибольшие глубины названных озер равны 48 м и 380 м соответственно. Найдите плотности воды озера Мона и Мертвого моря и давления воды в самых глубоких их местах, учитывая, что эти давления относятся как $28 : 285$. Значение величины g примите равным $9,8 \text{ м/с}^2$.

1331. Руслан и Максим на санках привезли в школу сбранную ими макулатуру. При этом на пути от дома до школы Руслан прикладывал силу, в среднем равную 25 Н , а Максим — силу, в среднем равную 35 Н , и вместе они покрыли путь, равный 950 м . Учитывая, что работы, выполненные Русланом и Максимом, относятся как $55 : 56$, найдите:

- а) эти работы; б) пути до школы от домов Руслана и Максима.

1332. Света и Наташа на санках привезли в школу собранную ими макулатуру. При этом до школы от дома Светы — 150 м, а от дома Наташи — 180 м. Учитывая, что силы, которые прикладывали Света и Наташа, вместе составляют 35 Н, а работы, выполненные ими, относятся как 5 : 8, найдите эти силы и эти работы.

1333. На полу стоят отец и сын, массы которых соответственно равны 81 кг и 54 кг, при этом давление, которое на пол оказывает отец, на 2940 Н/м^2 больше. Найдите площади подошв обуви отца и сына, учитывая, что они относятся как 6 : 5, а также то, что давление p силы F на поверхность S определяется формулой $p = \frac{F}{S}$, и принимая ускорение свободного падения равным $9,8 \text{ м/с}^2$.

1334. На полу стоят девочка и ее старший брат, массы которых соответственно равны 36 кг и 81 кг, при этом площадь подошвы обуви брата на 21 см^2 больше. Найдите давления, которые оказывают на пол сестра и брат, учитывая, что они относятся как 2 : 3, и принимая ускорение свободного падения равным $9,8 \text{ м/с}^2$.

1335. Игнат вытянул ведро воды объемом 11 л из колодца глубиной 25 м, а Виктор — ведро воды объемом 9 л из колодца глубиной 18 м, затратив на это вместе 29 с. Найдите мощности, которые развили Игнат и Виктор, учитывая, что они относятся как 3 : 4, а также то, что выполненная работа A , мощность N и время t выполнения работы связаны зависимостью $A = N \cdot t$, и принимая массу ведра равной 1 кг.

1336. Роман вытянул ведро воды объемом 9 л из колодца глубиной 15 м, а Сергей — ведро воды объемом 11 л из колодца глубиной 25 м, при этом развитые ими мощности вместе составили 343 Вт. Найдите эти мощности, приняв массу ведра равной 1 кг и учитывая, что время, затраченное на выполнение работы Романом, относится ко времени, затраченному на работу Сергеем, как 2 : 3.

1337. Один кит плывет со скоростью на 18 км/ч больше скорости второго кита, при этом первый кит развил мощность, равную 150 кВт, второй — мощность, равную 4 кВт. Найдите силы сопротивления воды движению первого и второго китов, учитывая, что первая из них на 18,4 кН больше, а также то, что развитая объектом мощность N , скорость его движения v и сила F сопротивления движению связаны зависимостью $N = F \cdot v$.

1338. Мотор с мощностью 15 кВт, установленный на автомобиле, может придать ему при движении по горизонталь-

ному участку дороги скорость на 78 км/ч большую скорости, которую может обеспечить лодке мотор с мощностью 12 кВт. Учитывая, что силы сопротивления движению автомобиля и моторной лодки отличаются на 3 кН, найдите:

а) эти силы; б) скорости движения автомобиля и лодки.

1339. Одно тело притягивается к Земле с силой, равной 588 Н, а на Луне другое тело с массой на 5 кг меньше притягивается к ней с силой, равной 88 Н. Учитывая, что ускорения свободного падения на Земле и на Луне вместе составляют $11,4 \text{ м/с}^2$, а также то, что сила притяжения $F_{\text{п}}$, масса m тела и ускорение свободного падения g связаны зависимостью $F_{\text{п}} = m \cdot g$, найдите:

а) эти ускорения; б) массы первого и второго тел.

1340. Одно тело притягивается к Марсу с силой, равной 555 Н, на Венере другое тело притягивается к ней с силой, равной 712 Н, а массы тел вместе дают 230 кг. Учитывая, что ускорение свободного падения на Марсе на $5,2 \text{ м/с}^2$ меньше, найдите:

а) эти ускорения; б) массы первого и второго тел.

1341. Костя с отцом возвращались домой. Отец поднялся в свою квартиру, а Костя пошел выше, к своему другу. В результате потенциальная энергия Кости увеличилась на 13 230 Дж, а отца — на 11 466 Дж. Массы Кости и отца вместе составляют 128 кг, номера этажей, на которые они поднялись, в сумме дают число 16. Учитывая, что потенциальная энергия $E_{\text{п}}$ тела, его масса m и высота h над поверхностью Земли связаны зависимостью $E_{\text{п}} = m \cdot g \cdot h$, и принимая для ускорения свободного падения g значение, равное $9,8 \text{ м/с}^2$, а высоту этажа равной 3 м, найдите:

а) массы Кости и его отца;

б) этажи, на которые поднялись Костя и отец.

1342. При изменении высоты на 50 м одно тело изменяет свою потенциальную энергию на Венере на 44 500 Дж, а другое тело на Нептуне — на 71 500 Дж. Учитывая, что вместе массы тел составляют 230 кг, а ускорения свободного падения на Венере и на Нептуне — $19,9 \text{ м/с}^2$, найдите эти массы и эти ускорения.

1343. При изменении высоты одного тела массой 120 кг его потенциальная энергия на Марсе изменяется на 66,6 кДж, а при изменении высоты этого тела на Юпитере — на 300 кДж. Учитывая, что вместе изменения высот тела составляют 250 м,

а ускорения свободного падения на Марсе и на Юпитере — $28,7 \text{ м/с}^2$, найдите эти изменения высоты и эти ускорения.

1344. Три токаря обработали 1085 деталей. При этом первый обработал вдвое больше деталей, чем второй, а третий — на 70 деталей меньше, чем первый. Сколько деталей обработал каждый токарь?

1345. Через две трубы можно наполнить бак за 2 ч 55 мин. Найдите, сколько времени этот бак будет наполняться через первую трубу, учитывая, что если наполнять его через вторую трубу, то понадобится на 2 ч больше.

1346. Две бригады вместе могут выполнить некоторый заказ за 12 ч. Определите, сколько времени над этим заказом работала бы одна первая бригада, учитывая, что для этого ей нужно на 10 ч меньше, чем второй.

1347. Над выполнением заказа работали две бригады. Сначала час работала одна первая бригада, а потом добавилась вторая, и еще через 2 ч им осталось выполнить 45 % заказа. После завершения работы выяснилось, что каждая бригада выполнила по 50 % заказа. Определите, сколько времени над этим заказом работала бы каждая бригада.

1348. Две насоса вместе могут заполнить бассейн за 2 ч 40 мин. Определите, за какое время один первый насос может заполнить бассейн, учитывая, что ему для заполнения 50 % бассейна нужно на 4 ч больше времени, чем второму на заполнение 75 % бассейна.

1349. На первом складе было 2400 т муки, а на втором — 1800 т. Каждый день с первого склада берут по 140 т, а со второго — по 90 т. Через сколько дней на первом складе станет муки в 1,5 раза меньше, чем на втором?

1350. Мама купила несколько яблок и столько же груш. После того как было съедено 15 яблок и 10 груш, яблок осталось вдвое меньше, чем груш. Сколько яблок было куплено?

1351. В трех школах 3080 учеников. Определите, сколько учеников в каждой школе, учитывая, что в первой учеников вдвое меньше, чем во второй, а в третьей на 80 учеников больше, чем в первой.

1352. Из пункта А со скоростью 60 км/ч выехал грузовик, а через 2 ч за ним со скоростью 80 км/ч выехал мотоциклист. На каком расстоянии от А мотоциклист догонит этот грузовик?

1353. Расстояние между двумя пристанями катер проходит за 2 ч 30 мин. Если бы катер уменьшил скорость на

6 км/ч, то он на этот путь затратил бы на 45 мин больше. Найдите скорость катера.

1354. Катер прошел 48 км против течения и вернулся назад, затратив 5 ч. Найдите скорость катера в озере, учитывая, что скорость течения реки составляет 4 км/ч.

1355. Моторная лодка за 1 ч прошла 5 км по течению реки и 8 км по озеру. Определите скорость лодки в озере, учитывая, что скорость течения реки составляет 3 км/ч.

1356. Моторная лодка за 30 мин прошла против течения тот же путь, на который по течению она затратила 10 мин. Найдите скорость лодки в озере, учитывая, что скорость течения реки составляет 2 км/ч.

1357. Поезд был задержан на станции на 16 мин, но он на перегоне в 80 км увеличил свою скорость на 10 км/ч и ликвидировал задержку. Определите скорость поезда по расписанию.

1358. Автомобиль проезжает путь от A до B за 1 ч. Он выехал из A и одновременно из B вышел пешеход. Автомобиль встретил пешехода, довез его до A , затем приехал в B , затратив на все 2 ч 40 мин. За какое время путь из A в B пройдет пешеход?

1359. Катер проплыл 18 км по течению реки, а затем 20 км против течения, затратив на весь путь 2 ч. Учитывая, что скорость катера в озере составляет 20 км/ч, найдите скорость течения реки.

1360. Из двух пунктов, расстояние между которыми 29 км, вышли одновременно два пешехода. Если бы первый, пройдя 8 км, не задержался на час, то встреча произошла бы на середине пути. А так встреча состоялась в 5 км от места задержки. Найдите скорость второго пешехода, учитывая, что первый пешеход после задержки увеличил свою скорость на 1 км/ч.

1361. Два пешехода вышли из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу и встретились через 30 мин. Продолжая движение, второй пришел в A через 11 мин после того, как первый — в B . Определите, сколько времени был в пути каждый пешеход.

1362. Двое рабочих обработали по 40 деталей. Найдите производительность труда первого рабочего, учитывая, что он работал на 3 ч дольше второго, который обрабатывал на 3 детали в час больше.

1363. Пешеход, который шел с постоянной скоростью, после 20 км пути сделал остановку на 1 ч, после которой шел

еще 10 км с уменьшенной на 1 км/ч скоростью. Определите первоначальную скорость пешехода, учитывая, что на весь путь он затратил 7 ч 30 мин.

1364. Первый двигатель израсходовал 300 г топлива, а второй, который работал на 2 ч меньше, — 192 г. Определите, каков расход топлива в час у первого двигателя, учитывая, что он на 6 г больше, чем у второго.

1365. Автомобиль выезжает из A в B , доезжает до B и сразу возвращается назад. Через 1 ч движения он был за 80 км от B , а еще через 3 ч — за 80 км от A . Найдите расстояние от A до B , учитывая, что на путь из A в B и назад в A автомобиль затратил меньше 9 ч.

1366. Хозяйство с первого поля собрало 1080 ц зерна, а со второго, площадь которого на 10 га меньше, — 750 ц. Если бы урожайность первого поля была такой, как второго, а второго — такой, как первого, то с полей зерна собрали бы поровну. Определите урожайность каждого поля.

1367. На обработку партии деталей двум рабочим нужно 1 ч. Определите, сколько времени нужно первому рабочему на обработку трех таких партий, учитывая, что две партии он обработал бы на 3 ч быстрее второго.

1368. Предприятие увеличило выпуск продукции в 5 раз. На сколько процентов увеличился выпуск продукции?

1369. Цех выпускает за смену 125 изделий. Сколько изделий за смену будет выпускать этот цех, если производительность труда увеличится на 20 %?

1370. Грибы при сушке теряют 80 % массы. Сколько понадобится свежих грибов, чтобы получить 1 кг сушеных?

1371. На сколько процентов увеличится площадь прямоугольника, если его длину увеличить на 10 %, а ширину — на 20 %?

1372. На сколько процентов увеличится площадь квадрата, если длину его каждой стороны увеличить на 10 %?

1373. В кружке количество парней составляет 80 % от количества девушек. Сколько процентов составляет количество девушек от количества парней в этом кружке?

1374. Первое число составляет 80 % второго, а второе — 120 % третьего. Найдите эти числа, учитывая, что их среднее арифметическое равно 15,8.

1375. Морская вода содержит 3,5 % соли по массе. Сколько пресной воды нужно долить к 40 кг морской, чтобы полученная вода содержала 1 % соли?

1376. Влажность груш при сушке изменяется с 70 % до 20 %. Сколько сушеных груш получится из 20 кг свежих?

1377. Смешали 10-процентный и 25-процентный растворы соли и получили 3 кг 20-процентного раствора. Определите, сколько было использовано каждого раствора.

1378. Смешали 30-процентный и 10-процентный раствор кислоты и получили 100 г 15-процентного раствора. Определите, сколько грамм каждого раствора взяли.

1379. При смешивании 30-процентного раствора кислоты с 10-процентным раствором получили 600 г 20-процентного раствора. Определите, сколько грамм 10-процентного раствора взяли.

1380. В раствор, содержащий 22 г кислоты, долили 15 г воды, от чего концентрация кислоты уменьшилась на 33 процентных пункта. Определите массу полученного раствора.

1381. Цинка в первом сплаве — 0,8 кг, а во втором — 0,6 кг. При этом процентное содержание цинка в первом сплаве на 10 процентных пунктов больше. Определите массу каждого сплава, учитывая, что их общая масса равна 10 кг.

1382. Первый слиток содержит 6 кг меди, а второй — 11 кг. При этом процентное содержание меди в первом слитке было на 40 процентных пунктов меньше. После того как оба слитка сплавляли, в полученном сплаве содержание меди составило 30 %. Определите процентное содержание меди в исходных слитках.

1383. Раствор массой 240 г содержит 15 % кислоты. Сколько граммов 25-процентного раствора кислоты нужно долить, чтобы получить 23-процентный раствор?

1384. Первый сплав массой 300 г содержит 60 % меди, второй сплав — 40 % меди. Сколько граммов второго сплава нужно взять, чтобы при переплавке с первым получить сплав с 56-процентным содержанием меди?

1385. Население райцентра за 2 года увеличилось с 20 000 человек до 22 050 человек. Определите среднегодовой процент роста населения в этом райцентре.

1386. Найдите отношение двух чисел, учитывая, что разность первого числа и 50 % второго составляет 50 % от суммы второго числа с 50 % первого.

1387. Произведение двух натуральных чисел равно 60. Найдите эти числа, учитывая, что они отличаются на 4.

1388. Площадь прямоугольника равна 120 см^2 , а его периметр — 52 см. Найдите измерения прямоугольника.

1389. Одно из чисел на 5 меньше другого, но его квадрат на 85 больше другого числа. Найдите меньшее число.

1390. Один из катетов прямоугольного треугольника на 1 см меньше гипотенузы и на 7 больше другого катета. Найдите стороны этого треугольника.

1391. От пристани одновременно вышли два катера: один — на запад, а другой — на юг. Через 2 ч расстояние между ими была 100 км. Определите скорости катеров, учитывая, что одна составляла 75 % другой.

1392. Одно из чисел на 3 больше второго, а его куб на 189 больше куба второго числа. Найдите меньшее число.

1393. Ширина прямоугольного параллелепипеда в два раза меньше его длины, а высота равна 5 дм. Определите объем параллелепипеда, учитывая, что его боковая поверхность на 108 дм^2 больше площади основания.

1394. Найдите два последовательных числа, сумма квадратов которых равна 365.

1395. Две бригады выполнили некоторый заказ за 4 дня. За какое время выполнила бы этот заказ первая бригада, если она сделала бы это на 6 дней быстрее второй?

1396. Два оператора ЭВМ вместе набрали 65 страниц текста. При этом первый работал на 1 ч больше второго, но второй за 1 ч набирал на 2 страницы больше первого, поэтому набрал на 5 страниц больше. Сколько страниц набирал за час первый оператор ЭВМ?

1397. Первый комбайн может убрать поле за 4 ч, а второй — за 3 ч. Они вместе работали на этом поле 1 ч. Сколько времени понадобится второму комбайну на то, чтобы закончить одному уборку на этом поле?

1398. Числитель дроби на 3 меньше знаменателя, а если увеличить числитель на 7, а знаменатель — на 5, то дробь увеличится на 0,5. Найдите эту дробь.

1399. Числитель дроби на 5 меньше знаменателя, а если числитель уменьшить на 2, а знаменатель увеличить на 16, то дробь уменьшится на $\frac{1}{3}$. Найдите эту дробь.

1400. Велосипедист за 3 ч 45 мин проехал 45 км. Найдите скорость велосипедиста на первой половине пути, учитывая, что на второй половине она была на 5 км/ч меньше.

Таблица квадратов

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Таблицы значений тригонометрических функций

sin	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	0,0175	0,0349	0,0523	0,0698	0,0872	0,1045	0,1219	0,1392	0,1564
1	0,1736	0,1908	0,2079	0,2250	0,2419	0,2588	0,2756	0,2924	0,3090	0,3256
2	0,3420	0,3584	0,3746	0,3907	0,4067	0,4226	0,4384	0,4540	0,4695	0,4848
3	0,5000	0,5150	0,5299	0,5446	0,5592	0,5736	0,5878	0,6018	0,6157	0,6293
4	0,6428	0,6561	0,6691	0,6820	0,6947	0,7071	0,7193	0,7314	0,7431	0,7547
5	0,7660	0,7771	0,7880	0,7986	0,8090	0,8192	0,8290	0,8387	0,8480	0,8572
6	0,8660	0,8746	0,8829	0,8910	0,8988	0,9063	0,9135	0,9205	0,9272	0,9336
7	0,9397	0,9455	0,9511	0,9563	0,9613	0,9659	0,9703	0,9744	0,9781	0,9816
8	0,9848	0,9877	0,9903	0,9925	0,9945	0,9962	0,9976	0,9986	0,9994	0,9998
cos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,000	0,9998	0,9994	0,9986	0,9976	0,9962	0,9945	0,9925	0,9903	0,9877
1	0,9848	0,9816	0,9781	0,9744	0,9703	0,9659	0,9613	0,9563	0,9511	0,9455
2	0,9397	0,9336	0,9272	0,9205	0,9135	0,9063	0,8988	0,8910	0,8829	0,8746
3	0,8660	0,8572	0,8480	0,8387	0,8290	0,8192	0,8090	0,7986	0,7880	0,7771

cos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	0,7660	0,7547	0,7431	0,7314	0,7193	0,7071	0,6947	0,6820	0,6691	0,6561
5	0,6428	0,6293	0,6157	0,6018	0,5878	0,5736	0,5592	0,5446	0,5299	0,5150
6	0,5000	0,4848	0,4695	0,4540	0,4384	0,4226	0,4067	0,3907	0,3746	0,3584
7	0,3420	0,3256	0,3090	0,2924	0,2756	0,2588	0,2419	0,2250	0,2079	0,1908
8	0,1736	0,1564	0,1382	0,1219	0,1045	0,0872	0,0698	0,0523	0,0349	0,0175
tg	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	0,0175	0,0349	0,0524	0,0699	0,0875	0,1051	0,1228	0,1405	0,1584
1	0,1763	0,1944	0,2126	0,2309	0,2493	0,2679	0,2867	0,3057	0,3249	0,3443
2	0,3640	0,3839	0,4040	0,4245	0,4452	0,4663	0,4877	0,5095	0,5317	0,5543
3	0,5774	0,6009	0,6249	0,6494	0,6745	0,7002	0,7265	0,7536	0,7813	0,8098
4	0,8391	0,8693	0,9004	0,9325	0,9657	1,0000	1,0355	1,0724	1,1106	1,1504
5	1,1918	1,2349	1,2799	1,3270	1,3764	1,4282	1,4826	1,5399	1,6003	1,6643
6	1,7320	1,804	1,881	1,963	2,050	2,145	2,246	2,356	2,475	2,605
7	2,747	2,904	3,078	3,271	3,487	3,732	4,011	4,331	4,705	5,145
8	5,671	6,314	7,115	8,144	9,514	11,43	14,30	19,08	28,64	57,29
ctg	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	57,29	28,64	19,08	14,30	11,43	9,514	8,144	7,115	6,314
1	5,671	5,145	4,705	4,331	4,011	3,732	3,487	3,271	3,078	2,904
2	2,747	2,605	2,475	2,356	2,246	2,145	2,050	1,963	1,881	1,8040
3	1,7320	1,6643	1,6003	1,5399	1,4826	1,4282	1,3764	1,3270	1,2799	1,2349
4	1,1918	1,1504	1,1106	1,0724	1,0355	1,0000	0,9657	0,9325	0,9004	0,8693
5	0,8391	0,8098	0,7813	0,7536	0,7265	0,7002	0,6745	0,6494	0,6249	0,6009
6	0,5774	0,5543	0,5317	0,5095	0,4877	0,4663	0,4452	0,4245	0,4040	0,3839
7	0,3640	0,3443	0,3249	0,3057	0,2867	0,2679	0,2493	0,2309	0,2126	0,1944
8	0,1763	0,1584	0,1405	0,1228	0,1051	0,0875	0,0699	0,0524	0,0349	0,0175

Ответы

Раздел I

- 18.** а) 4 см; 2 см; б) 4 см; 2 см; в) 5 см; 1 см; г) 3,5 см; 2,5 см. **19.** а) 4 см и 2 см или 8 см и 6 см; б) 4 см и 2 см или 12 см и 6 см; в) 5 см и 1 см или 6,2 см и 0,2 см; г) 3,5 см и 2,5 см или 21 см и 15 см. **23.** а) 90° , 45° , 45° ; б) 60° , 60° , 60° . **24.** 17 см, 15 см, 16 см. **25.** 20 г, 30 г, 17 г. **36.** г) $3a + 10b > 2a + 4b$; ж) $3a + 4b > 2a - 2b$. **77.** а) $0^\circ < \angle N \leq 48^\circ$; б) $92^\circ \leq \angle O < 140^\circ$. **78.** г) $100 \text{ м}^2 \leq S < 140 \text{ м}^2$; е) $50 \text{ м}^2 < S < 130 \text{ м}^2$. **84.** а) -3,2; б) -5,2; в) -0,4; г) 0; д) 2,8; е) не имеет значения.
- 85.** а) $\frac{2-a}{2a}$; б) $\frac{3}{b+5}$; в) 2; г) $\frac{2p}{3p-q}$. **86.** а) -1; б) 1. **87.** а) 40 см, 20 см, 6 см, 14 см; б) 30 дм, 10 дм, 4 дм, 16 дм; в) 7,4 м, 0,2 м, 2,4 м, 4,8 м. **88.** 4 см, 6 см, 8 см. **89.** а) $P_1(4)$; б) $P_1(-11)$; в) $P_1(5)$; г) $P_1(-12,4)$. **90.** а) 60 мм, 45 мм; б) 63 мм, 42 мм; в) 42 мм, 63 мм; г) 55 мм, 50 мм. **91.** $\approx 67 \text{ см}^2$. **92.** 36° , 72° , 72° . **93.** 40 мм, 45 мм, 60 мм. **94.** 1 тыс., 0,3 тыс., 2,6 тыс. **95.** 18 км/ч, 52 км. **96.** 1725 ц, **97.** 2850 км, 1352 км, 2201 км, 1151 км. **111.** б) $11 < a + b < 13$; $-8 \leq a - b < -6$; $18 < ab < 30$; $\frac{1}{5} \leq \frac{a}{b} < \frac{1}{3}$; г) $11 \leq a + b < 13$; $-8 \leq a - b < -6$; $18 \leq ab < 30$; $\frac{1}{5} \leq \frac{a}{b} < \frac{1}{3}$. **112.** а) $314 < C < 320,28$; б) $7850 < S < 8167,14$. **113.** а) $20,2 \text{ см} < p < 20,6 \text{ см}$; б) $24,18 \text{ см}^2 < S < 25,2 \text{ см}^2$. **114.** а) $44,55 \text{ м}^2 < S < 45,92 \text{ м}^2$; б) $138,105 \text{ м}^3 < V < 146,944 \text{ м}^3$. **116.** $7^\circ < C < 9^\circ$. **117.** а) 16,7 см или 2,5 см; б) 7,9 дм или 0,7 дм. **119.** 5 см. **120.** а) 75° , 120° , 165° , 90° , 90° , 240° , 150° , 150° . **121.** а) 527; б) 254; в) 79; г) 47; д) 14; е) 2; ж) -2; з) 7; и) -1,75; к) 23; л) 142; м) 359. **122.** а) $\frac{9a}{a-b}$; б) $\frac{5x+6z}{z-1}$; в) $\frac{12-c}{3c-2}$; г) $\frac{2(m^4+n^4)}{m^4-n^4}$; д) $\frac{4l^2k^2}{k^4-l^4}$; е) $\frac{-8d^2+2d+39}{2d(2d+3)}$.
- 124.** 15 344. **125.** 640 изделий. **126.** 9 км/ч, 15 км/ч. **134.** ж) $p \leq 5$; з) $q \leq -8$. **135.** $t \leq 3,5$. **136.** $u \geq 1,5$. **137.** а) $z < 0,5$; б) $y \leq 0,4$; в) $x > 5$; г) $w \geq -3$; д) $v < 3$; е) $u \leq -1$; ж) $t < 7,5$; з) $s \leq -0,5$. **138.** а) При $h > 5$; б) при $g > 2,75$; в) при $f \leq \frac{2}{3}$; г) при $b \leq -\frac{2}{3}$; д) при $e > 4,5$; е) при $d \leq 1,75$; ж) при $c < 4$; з) при $a \geq -1\frac{2}{3}$. **139.** а) $x \leq -5$; б) $z < -1$; в) $y < -1,75$; г) $u > \frac{6}{11}$; д) $t \geq -0,1$; е) $s > -2,2$; ж) $p \geq 1,1$; з) $r \geq \frac{4}{9}$. **140.** а) $a > 6\frac{2}{3}$; б) $b \leq 12$; в) $c > 0$; г) $d \geq 5,5$; д) $f > -16$; е) $g \geq -1\frac{1}{4}$; ж) $h \geq 2\frac{1}{7}$; з) $k > 139$; и) $u \geq 25\frac{1}{3}$; к) $w < 24$; л) $s \leq 22$; м) $p < 3,5$. **141.** а) $a < 1\frac{1}{27}$; б) $b \leq 2\frac{1}{3}$; в) $c > -3,5$; г) $e \leq 53$. **142.** а) $c = -45$; б) $x = -157$; в) $y < 1\frac{8}{13}$; г) $d \leq -1\frac{8}{7}$. **144.** а) $x \geq \frac{1}{4}$; б) $y \leq -5$; в) $t \geq -\frac{8}{47}$; г) $r < -\frac{1}{3}$; д) $s \leq -\frac{1}{6}$; е) $u > -3\frac{5}{6}$. **145.** а) $a < -\frac{8}{43}$; б) $u = -\frac{8}{43}$; в) $a > -\frac{8}{43}$; г) $a > 1\frac{19}{43}$. **146.** а) $a > -3$; б) $b < 3$; в) $c > 10$; г) $k > -\frac{1}{3}$; д) $m > 3$; е) $u < -1,5$. **147.** а) -1; б) 4; в) -2; г) 0. **148.** а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 2.

149. а) $b \neq -5$; г) $y \neq 1$; д) $s \neq -2$ и $s \neq 2$; е) $k \neq -1$ и $k \neq 1$; ж) $y \neq -3$ и $y \neq 3$; з) a, b, c — любые числа. 150. Менее 3 см. 151. Не более $26\frac{2}{3}$ км.
152. Не менее 43 деревьев. 153. Более 5 см, но менее 19 см. 154. 18. 155. Более $41\frac{7}{9}$ км/ч. 157. $a \leq 4$ м. 158. $h \geq 8$ см. 159. $h \leq 8,1$ дм. 160. $5 \text{ см} \leq a < 11$ см; $b = (11 - a)$ см. 161. $751,5 \text{ км}^2$; 501 км^2 ; $250,5 \text{ км}^2$. 163. е) $\frac{1}{1296}$; к) $\frac{27}{8}$; м) $\frac{16}{81}$. 164. а) $1\frac{5}{27}$; б) $\frac{12}{25}$; в) $3\frac{5}{9}$; г) $\frac{1}{5}$. 165. а) $(a + b)(b + c)$; б) $(x + 4)(x - y)$; в) $(m + n)(m + p)$; г) $(p - q)(q - 2)$; д) $(6u + v)(2v - 1)$; е) $(c - 7)(d + 4)$.
166. а) 3, 25; б) 2, 4; в) 2 или 9. 167. 5, 6 и 7, 6. 168. 1250. 169. 7 л, 6 л, 5 л. 175. а) $(-\infty; 2)$; б) $(17; +\infty)$; в) $(0; 9)$; г) нет решений; д) $(-\infty; -5]$; е) $[-17; -7)$; ж) $[-7; 2]$; з) $[-6; +\infty)$. 176. а) $(5; 6)$; б) $(-\infty; -1)$; в) $(0; 5, 2]$; г) нет решений; д) $[6; +\infty)$; е) $(-\infty; -2)$; ж) $[2; 5]$; з) $(-2; 3)$. 177. а) $[-12; 2]$; б) нет решений; в) $(0; 15)$; г) $(-\infty; -3]$; д) $[-1; 0, 8]$; е) $(-\infty; -1, 5]$; ж) $[\frac{1}{4}; +\infty)$; з) $[3; 6, 7)$.
178. а) $(3; +\infty)$; б) $(-\infty; -3)$; в) 12; г) $[1\frac{1}{8}; +\infty)$; д) $(-1\frac{1}{2}; 0]$; е) $(0; 2, 5]$.
179. а) $(-3; 2, 5]$; б) $[-\frac{1}{2}; 2]$; в) $(-\frac{1}{2}; +\infty)$; г) $(0; +\infty)$; д) $[1, 3; 2, 5]$; е) $(-\infty; -4, 9)$.
180. а) $(-\infty; -0, 6)$; б) $(4, 5; 6, 5]$; в) $[5; +\infty)$; г) $(-17; +\infty)$. 181. а) Целые числа от -4 до 3; б) $-1, 0, 1, 2, 3$; в) 1; 2; 3; г) 1. 182. а) Нет решений; б) нет решений.
183. а) $(-\infty; 5)$; б) $(2; 15]$; в) $(\frac{2}{11}; 31)$; г) $(-1; +\infty)$. 184. а) $(-1; 2)$; б) $(3; 13]$; в) $[-1; 1]$; г) $(-1; 3]$. 185. а) $[-6; 15]$; б) $[-7; 11]$; в) $(-17; 2]$; г) $[3; 11]$. 186. а) $(5; +\infty)$; б) $(-\infty; -4)$; в) $(11; 14)$; г) нет решений; д) $[18; 25]$; е) 4. 187. а) $(-2; 3]$; б) $(-2; 1)$.
188. а) Нет решений; б) $(-4; 1)$; в) $(\frac{1}{5}; 4)$; г) нет решений. 189. а) $(3 \text{ см}; 10 \text{ см})$; б) $(4 \text{ см}; 15 \text{ см})$; в) $[6 \text{ см}; 15 \text{ см})$; г) таких треугольников нет. 190. 36 км.
191. От 8 л до 24 л. 194. $135\pi \text{ дм}^2$, $191,25\pi \text{ дм}^2$. 195. 572 км, 452 км, 445 км; 1024 км, 1017 км. 197. а) 8; б) 8; в) 8; г) 8. 199. д) $\frac{2}{3} x^2 y z^{-6}$; з) $\frac{1}{3} r^{13} s^{-2} t^{-11} v^{-2}$.
200. а) $22\frac{2}{3}$; б) 3; в) -1 ; г) нет корней. 206. а) $-1, 2$; б) -22 ; 24; в) 0; 14; г) $-\frac{2}{5}$; 2; д) нет корней; е) $\frac{8}{4}$; ж) $-5\frac{1}{3}$; 8; з) $-1\frac{10}{13}$; $-\frac{11}{13}$; и) $36\frac{2}{3}$; 50.
210. а) $-3 < k < 3$; б) $-12 \leq l \leq 12$. 211. а) $|p| < 4$; г) $|s| \leq 7, 4$. 212. а) $|a| \geq 3$; в) $-\frac{18}{19} \leq c \leq \frac{13}{19}$. 215. а) $[-3, 3; 1, 3]$; б) $(-\infty; -6] \cup [40; +\infty)$; в) $(-1; 6)$; г) $(-\infty; -5) \cup (-2, 8; +\infty)$; д) $(-\infty; -3\frac{2}{7}) \cup (-\frac{5}{7}; +\infty)$; е) $(\frac{8}{11}; 5\frac{8}{11})$; ж) $[-10\frac{4}{13}; -3\frac{9}{13}]$; з) $(-\infty; 5\frac{9}{14}] \cup [8\frac{5}{14}; +\infty)$; и) $(-\frac{1}{12}; 1\frac{1}{12})$; к) $(-\frac{2}{7}; \frac{17}{21})$; л) $[\frac{11}{26}; 1\frac{1}{13}]$; м) $(-\infty; -\frac{19}{70}] \cup [1\frac{61}{70}; +\infty)$. 216. а) $(-2; 0) \cup (0; 2)$; б) $(-5; -2] \cup [2; 5)$; в) $(-4; -1] \cup [1; 4)$; г) $[-4; 1) \cup (1; 4]$; д) $[-1; 0, 5) \cup (2, 5; 4]$

е) $[0, 2; 1]$. **219.** а) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$; б) $\left[0; \frac{2}{3}\right]$; в) $\left[-1; 1\frac{2}{3}\right]$; г) $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$;
 д) $\left(-1\frac{7}{13}; 2\right)$; е) $(-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$. **220.** а) $-2; -1; 0; 1; 2; 3$; б) $-1; 0; 1; 2;$
 $3; 4$; в) $-3; -2; -1; 0; 1; 2$; г) 1 ; д) $-12; -11; -10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3;$
 $-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$; е) $-2; -1; 0$. **221.** а) При $a \geq -2$; б) при $b \leq -2$; в) при
 $c \geq 3$; г) при $d \leq 3$. **222.** а) $1,5$; б) $0,5$; в) $-5,5$; г) 7 ; д) -8 ; $\frac{2}{3}$; е) 8 ; $1\frac{5}{7}$.
223. а) $0; 2$; б) $-17; 7$; в) $-1; -9; -17$; г) нет решений. **224.** а) $(-\infty; +\infty)$;
 б) $[-12; 4]$; в) $(-\infty; 2) \cup (10; +\infty)$; г) нет решений. **225.** а) $(-\infty; 0)$; б) $(2; +\infty)$;
 в) $(-3; +\infty)$. **226.** а) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; б) $(-\infty; -13,5] \cup [13,5; +\infty)$;
 в) $(-\infty; -1,8] \cup [1,8; +\infty)$; г) $(-7,5; 0) \cup (0; 7,5)$; д) $\left[-7\frac{1}{3}; -5\right] \cup \left(-5; -2\frac{2}{3}\right)$;
 е) $\left(-\infty; -\frac{4}{7}\right) \cup \left(16\frac{4}{7}; +\infty\right)$. **227.** а) $(1; 7)$; б) $(2; +\infty)$; в) $[-1; 1) \cup (3; 4)$.
230. 144° . **231.** 144° . **232.** $80^\circ \leq n \leq 180^\circ$, $|n - 130^\circ| \leq 50^\circ$; $32\pi \text{ м}^2 \leq S \leq 72\pi \text{ м}^2$,
 $|S - 52\pi| \leq 20\pi$. **233.** $\left[16 \text{ км/ч}; 21\frac{1}{3} \text{ км/ч}\right]$; $\left[15\frac{2}{3} \text{ км/ч}; 18,8 \text{ км/ч}\right]$; $[14,25 \text{ км/ч};$
 $19 \text{ км/ч}]$. **234.** $6 \text{ см}, 8 \text{ см}, 7 \text{ см}$.

Раздел II

240. а) $138^\circ, 62^\circ$; б) $140^\circ, 70^\circ$. **241.** а) $130^\circ, 140^\circ, 40^\circ$; б) $124^\circ, 166^\circ, 14^\circ$;
 в) $80^\circ, 100^\circ, 120^\circ, 60^\circ$; г) $80^\circ, 100^\circ, 70^\circ, 110^\circ$. **243.** а) $54^\circ, 126^\circ, 72^\circ, 108^\circ$;
 трапеция; б) $105^\circ, 75^\circ, 105^\circ, 75^\circ$; параллелограмм; в) $128^\circ, 96^\circ, 56^\circ, 80^\circ$.
245. а) Могут; б) нет; в) нет; г) нет. **246.** $80^\circ, 100^\circ, 130^\circ, 50^\circ$. **247.** $10 \text{ м}, 4 \text{ м}$.
251. а) $70^\circ, 110^\circ$; б) $30^\circ, 150^\circ$; в) $75^\circ, 105^\circ$; г) $40^\circ, 140^\circ$. **252.** 84 см .
253. 240 см . **254.** $5 \text{ дм}, 2 \text{ дм}, 5 \text{ дм}$. **255.** $12 \text{ см}, 17 \text{ см}; 120^\circ, 60^\circ$. **258.** 2 дм и 3 дм .
261. а) $(2; +\infty)$; б) $\left(3\frac{9}{13}; +\infty\right)$. **262.** а) $[2; +\infty)$; б) $(-1; 2)$. **263.** а) 1 ; б) 0 .
265. $R_3 = \frac{RR_1R_2}{R_1R_2 - R(R_1 + R_2)}$. **266.** 42 . **267.** 4 . **269.** а) 7 см ; б) 5 см ;
 в) 3 см . **270.** 16 см . **271.** 3 м . **272.** 1 м . **275.** 76 см . **276.** $37,5 \text{ дм}; 7,5 \text{ дм};$
 $12,5 \text{ дм}; 17,5 \text{ дм}$. **277.** $960 \text{ мм}, 240 \text{ мм}, 300 \text{ мм}, 420 \text{ мм}$. **278.** 2 см .
279. $12 \text{ см}, 22 \text{ см}, 30 \text{ см}$. **280.** 4 дм . **281.** $1 : 1$. **282.** а) 35 мм ; б) $3,56 \text{ м}$;
 в) 32 см . **283.** 63 мм . **284.** $71,5 \text{ мм}$. **285.** а) $140 \text{ мм}, 80 \text{ мм}$; б) $42 \text{ см}; 140 \text{ см}$.
286. В 2 раза. **287.** 32 см . **288.** 10 см . **293.** а) 6 см ; б) 9 см . **294.** 21 мм .
296. 13 см . **298.** $1 \text{ см}, 6 \text{ см}, 5 \text{ см}$ или $3\frac{2}{3} \text{ см}, 3\frac{1}{3} \text{ см}, \frac{1}{3} \text{ см}$. **301.** а) $[-3; 3]$;
 б) $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$; в) $(-\infty; -4] \cup [14; +\infty)$; г) $\left(-\frac{2}{3}; 2\right)$; д) $(-11; 3)$;
 е) $(-\infty; -8] \cup [3; +\infty)$. **305.** $53 \text{ см}, 50 \text{ см}, 52 \text{ см}, 50 \text{ см}$. **313.** 76° . **314.** 40 см .
315. а) $42^\circ, 48^\circ$; б) 6° . **316.** а) 280 см ; б) $373\frac{1}{3} \text{ см}$. **317.** $26^\circ, 64^\circ$.
318. а) 10 см ; б) 29 м ; в) 17 дм ; г) 37 см . **319.** 8 см . **321.** $4 \text{ м}, 4 \text{ м}$. **323.** а) $60^\circ,$
 $120^\circ; 30^\circ, 60^\circ$; б) $40^\circ, 140^\circ; 20^\circ, 70^\circ$. **326.** $40 \text{ см}, 10 \text{ см}$. **329.** 48 см . **331.** а) 2 м ;
 б) $0,5 \text{ м}$. **333.** а) 8 ; б) $2m - 1$. **334.** а) Нет решений; б) нет решений.
337. б) $P(0,5; -1,5); Q(-1; 2,5); R(1; 4); S(2,5; 0)$. **339.** $3 \text{ м}, 5 \text{ м}, 7 \text{ м}$. **340.** 4 .
341. 142857 .

Раздел III

- 348.** а) 0,(3); б) 0,(285714); в) -0,4(6); г) -0,85; д) -1,175. **349.** а) 2,(6); б) 0,(142857); в) 0,(904761); г) -0,3(45); д) 7,(063). **353.** а) $\frac{8}{33}$; б) $\frac{5}{11}$; в) $3\frac{53}{225}$; г) $4\frac{14}{15}$; д) $-6\frac{53}{72}$; е) $\frac{12}{13}$. **355.** а) $\frac{2m-3n}{m-n}$; б) -1; в) $\frac{1-l}{k}$; г) $\frac{4(r^2+s^2)}{(r-s)^2}$.
- 357.** а) 43 и 53 или 1 и 11; б) 63 и 53 или 21 и 11. **359.** а) -5; б) -7; в) -11; г) -9. **360.** 13,5 кг. **361.** 9 г, 10 г. **362.** 1 кг 920 г, 960 г, 9 кг 120 г. **363.** 40 %, 50 %, 10 %. **370.** г) 6; д) 1,4; е) 0,2. **371.** г) $-2 < -\sqrt{3} < -1$; д) $-9 < -\sqrt{75} < -8$; е) $-21 < -\sqrt{401} < -20$. **372.** д) 0,800. **378.** л) 1,5; м) $1\frac{8}{5}$. **379.** л) 2,5; м) $2\frac{2}{3}$.
- 380.** д) -1,4; 1,4; ж) -1,5; 1,5. **381.** г) 4; д) $\frac{1}{4}$; е) $\frac{5}{6}$. **382.** а) 0,11; б) 2; в) 1,44; г) 2,31; д) $\frac{24}{25}$; е) $8\frac{3}{4}$. **385.** а) 100; б) $\frac{1}{25}$; в) $2\frac{7}{9}$; г) ни при каком; д) 9; е) ни при каком. **386.** а) 16,5; б) 470; в) 1,5. **393.** 680 г. **394.** 1 : 2. **399.** б) 7 и 8; д) 0 и 1. **400.** б) -10 и -9. **401.** а) 4; б) 4,5; в) 4,47; г) 4,472. **403.** г) 572. **404.** в) 25,79; г) 51,94. **408.** б) 29,83 мм; д) 267,32 м. **410.** а) 17,08; б) 0,51; в) 10,96; г) 4,75; д) 13,39; е) 35,51; ж) 11,32; з) 1,65. **411.** а) 9; -9; б) 2,793; -2,793; в) 0,659; -0,659; г) 0,089; -0,089; д) 9,606; 2,394; е) 3,550; -11,550; ж) 2,192; -1,620; з) 2,949; -1,494. **412.** а) 29,85; б) 29,68; в) 14,36; г) 1,25; д) 6,05; е) 4,54; ж) 239,43; з) 227,91; и) 3,19; к) 4,73; л) 1,50; м) 3,93.
- 414.** е) $\left(\frac{4x^3y}{5y^8}\right)^2$; з) 124^2 . **415.** 44 кг. **416.** 40; 50; 45. **417.** 500 г, 100 г.
- 418.** 300 т. **422.** 10, 7, 7. **424.** а) -7; б) $-\frac{a+1}{b}$; в) $\frac{1}{(1+2x+3y)(2x+3y)}$; г) $\frac{m+2n}{2n(2n-m)}$. **425.** и) $a^k \cdot t$; о) $f^n \cdot m$; п) g^{-2u} ; р) h^{-2v} . **427.** 8899; 9799.
- 430.** г) 3. **431.** в) 159; л) нет значения. **432.** а) 32; д) 121; е) 2197; ж) 729; з) 128.
- 433.** а) a^4 ; б) b^6 ; в) c^5 ; д) $|d|^7$. **434.** а) 3; б) 0; в) 2; г) 4; д) 7. **437.** а) 5 и 6; б) 12 и 13; в) 0 и 1; г) -7 и -6; д) -32 и -31; е) -1 и 0. **438.** а) 50; б) 54; в) 88; г) 36; д) 14,3; е) 15,6; ж) 1,6; з) 0,51; и) 3,06; к) 24; л) 12; м) 4,5.
- 439.** а) $\frac{4}{7}$; б) $\frac{9}{8}$; в) $\frac{12}{11}$; г) $\frac{15}{16}$; д) $\frac{12}{13}$; е) $\frac{19}{20}$; ж) 2,5; з) $1\frac{1}{4}$; и) 2,4; к) $2\frac{1}{4}$; л) $1\frac{3}{4}$; м) $3\frac{1}{3}$. **440.** а) 42; б) 88; в) 14; г) 0,48; д) 2,47; е) 15; ж) 3,5; з) 3,4; и) $2\frac{6}{7}$; к) 14; л) 21; м) 4,6. **441.** а) 37,8; б) 23,1; в) 0,0072; г) $\frac{168}{935}$; д) $\frac{85}{576}$; е) $\frac{308}{405}$; ж) $7\frac{19}{35}$; з) 3; и) $2\frac{3}{4}$. **442.** а) 90; б) 0,24; в) 0,0154; г) $\frac{3}{5}$; д) $\frac{7}{16}$; е) 1. **443.** а) 210; б) 90; в) 60; г) 42; д) 20; е) 7,2; ж) 28; з) 7,6.
- 444.** а) 7; б) 25; в) 9; г) 17; д) 37; е) 11; ж) 53; з) 13. **446.** а) 280; б) 570; в) 12 000; г) 8300; д) 3,9; е) 0,046; ж) 0,0077; з) 0,00084. **447.** а) 108; б) 72; в) 125; г) 261; д) 420; е) 1925; ж) 7007; з) 4235. **448.** а) 243; б) 1875; в) 3087; г) 5929; д) 1859; е) 1547; ж) 16 093; з) 9317. **449.** а) 4; б) 6; в) 10; г) 15; д) 22;

е) 21; ж) 26; з) 4. **450.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{10}$; в) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{2}{3}$; д) $\frac{3}{5}$; е) $\frac{3}{5}$; ж) $\frac{5}{3}$; з) 0,4.
451. а) 30; б) 30; в) 15; г) 0,75; д) 26; е) 1,2; ж) 1,5; з) 0. **452.** а) 18; б) 80;
 в) 48; г) 45; д) -1; е) -70. **453.** а) 1; б) $\frac{7}{12}$; в) $\frac{11}{24}$; г) $1\frac{17}{45}$; д) 0,2; е) 6,8; ж) $\frac{1}{3}$;
 з) $8\frac{2}{3}$. **454.** В 2 раза. **455.** $4\sqrt{6}$ см. **456.** 25. **457.** ≈ 71 мм. **458.** а) 7; б) 15;
 в) 21; г) 9. **460.** 2200 т, 1100 т. **461.** 312. **462.** 2822 и 2158. **463.** 90 %.
465. Больше курочек. **466.** (2; 10), (-4; 6), или (10; -2), (4; -6), или (1; 5), (5;
 -1). **469.** и) $\sqrt{10}$; к) $\sqrt{2}$. **476.** а) $a\sqrt{5}$; б) $-2b\sqrt{2}$; в) $2c^2\sqrt{2}$; г) $d^4\sqrt{10}$; д) $k\sqrt{k}$;
 е) $l^2\sqrt{l}$; ж) $5x^3\sqrt{x}$; з) $6y^4\sqrt{y}$; и) $0,5z^5\sqrt{5z}$; к) $\frac{3t}{7}\sqrt{3t}$. **477.** а) $5m\sqrt{5m}$;
 б) $10n^5\sqrt{2n}$; в) $-2x^3\sqrt{6}$; г) $3y^5\sqrt{5}$; д) $-6a\sqrt{3}$; е) $5b^7\sqrt{2}$; ж) $6t^8\sqrt{2}$;
 з) $4u^{10}\sqrt{3}$. **478.** в) 0; г) \sqrt{s} ; д) $-12\sqrt{3t}$; е) $2\sqrt{2u}$; ж) $-5\sqrt{5v}$; з) $-8\sqrt{3}$; и) $11\sqrt{2}$;
 к) $-6\sqrt{2}$; л) 0; м) $-4\sqrt{6} - 18\sqrt{2} - 6\sqrt{11}$. **479.** а) $5(\sqrt{3} + \sqrt{7})$; б) $9(1 - \sqrt{5})$;
 в) $24\sqrt{2} - 60$; г) $4(7 + \sqrt{21})$; д) $10(\sqrt{3} + 1)$; е) $5\sqrt{10}$. **480.** г) $7 + 2\sqrt{10}$;
 д) $c^3 - 3c^2\sqrt{d} + 3cd - d\sqrt{d}$; е) $27 + 5\sqrt{5}$. **481.** а) 44; б) $23 - 10\sqrt{77}$;
 в) $58 + 12\sqrt{6}$; г) $93 - 36\sqrt{3}$. **482.** а) 12; б) 8; в) $18 - 52\sqrt{5}$; г) $10 + 6\sqrt{2}$.
483. в) $84(7\sqrt{3} - 3\sqrt{7})$; г) 103. **484.** б) $150\sqrt{3} - 90\sqrt{5}$; в) $128\sqrt{2}$.
486. а) $\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)$. **487.** а) $h + \sqrt{5}$; б) $\frac{1}{2\sqrt{2} - i}$; в) $-\frac{1}{3 + \sqrt{j}}$; г) $\sqrt{k} - 4$;
 д) $\sqrt{l} - \sqrt{m}$; е) $\frac{1}{3\sqrt{n} + 2\sqrt{p}}$; ж) $-\sqrt{6}$; з) \sqrt{q} ; и) $\frac{1}{\sqrt{r}}$; к) $s\sqrt{2} + \sqrt{3}$; л) $2t - 2\sqrt{2}$;
 м) $\sqrt{3a} - \sqrt{2}$. **488.** г) $\frac{x\sqrt{y}}{y^2}$; и) $\frac{\sqrt{10}}{4}$; л) $\frac{\sqrt{p}}{7}$. **489.** б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; и) $\frac{m}{n\sqrt{m}}$.
490. а) $3(\sqrt{2} - 1)$; б) $-2(\sqrt{2} + 1)$; в) $\frac{5(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}$; г) $\frac{x(\sqrt{y} - \sqrt{z})}{y - z}$; д) $\frac{3 + \sqrt{2}}{2}$;
 е) $2(7 - 3\sqrt{3})$; ж) $\frac{9 + \sqrt{13}}{2}$; з) $4(\sqrt{7} + \sqrt{3})$. **492.** а) $a - b$, если $ab > 0$ и $|a| > |b|$;
 $\frac{b}{a}(b - a)$, если $ab > 0$ и $|a| < |b|$; б) $a + b$, если $ab > 0$. **493.** а) $\frac{1}{n}$ при $0 < |n| < 1$;
 n при $|n| \geq 1$; б) $\frac{2\sqrt{a-1}}{a-2}$ при $a > 2$; $\frac{2}{2-a}$ при $1 < a < 2$. **494.** а) 10; б) 25.
497. 3,5 см. **498.** В 15 ч 18 мин. **499.** 1 ч 10 мин. **500.** 30 км. **501.** 20 км.

Раздел IV

510. 20 м. **512.** 60 дм. **513.** 32 м и 42 м или 54,8 м и 57,2 м. **514.** $\frac{c^2}{4}$. **515.** 9 дм
 или $32\frac{1}{9}$ дм. **516.** 4,8 м. **517.** 182 см, 546 см²; $12\frac{72}{85}$ см. **519.** 25 дм². **520.** 15 +
 + $9\sqrt{5}$ м; 45 м². **522.** а) 1080 мм²; б) $20\sqrt{11}$ см²; в) $\frac{1}{4}a\sqrt{4b^2 - a^2}$. **523.** а) 84;
 б) 66; в) 252; г) 126; д) 18,5; е) 3,5. **524.** а) $9\sqrt{3}$ м, $10\sqrt{3}$ м, $17\sqrt{3}$ м; б) $11\sqrt{5}$ м,
 $13\sqrt{5}$ м, $20\sqrt{5}$ м. **525.** $47\frac{29}{53}$ см. **526.** а) $6\sqrt{5}$ м или 20 м; б) 12 см или
 $2\sqrt{3589}$ см; в) 11 дм или $3\sqrt{41}$ дм. **528.** а) $\frac{a^2 + b^2}{a^2 + ab + b^2}$; б) $\frac{(m+n)^2}{m^2 - mn}$; в) $-\frac{u+1}{3u}$;

- г) $\frac{ig - ih}{jg + ih}$; д) $\frac{qr}{(q+r)^2 - p^2}$; е) $\frac{ce}{(c-e)^2 - d^2}$. 529. а) $\frac{a-1}{a+1}$; б) $\frac{4x-3}{x(x-1)}$; в) $\frac{b+1}{b-1}$;
- г) $\frac{1}{2}$. 530. а) 11; б) 7; в) 5; г) нет корней. 531. 4 м, 12 м. 532. 14 августа 1385 г.
533. 1 и 4; -1 и -4; 13 и -4; -13 и 4. 536. 24 см. 537. 6 дм и 8 дм. 538. а) 63; б) 66; в) 56. 541. 21 см, 18 см. 543. 10 см. 544. $32\sqrt{3}$ м². 545. 60 см². 546. 337,5 м². 548. 30°; 150°. 550. $1071\frac{3}{7}$ м². 551. 882 м². 553. 100 дм, 420 дм². 554. 1710 мм². 555. а) 864 см²; б) 594 м²; в) 1680 мм². 556. 30 см, 36 см. 557. 1330 мм². 560. 75 см². 563. а) 126 дм²; б) $126\sqrt{2}$ дм²; в) $126\sqrt{3}$ дм². 564. $\sqrt{\frac{Q(k^2+l^2)}{2kl}}$. 566. 5400 м². 568. $5+4t$. 570. а) (2; +∞); б) $(3\frac{9}{13}; +\infty)$. 571. а) (-∞; -3); б) (3; 19]; в) нет решений; г) $(3\frac{1}{3}; +\infty)$. 572. 731 км², 75 км², 138 км². 576. 41 096. 577. а) $\frac{5}{4}$; б) 1,5; в) $\frac{5\sqrt{15}}{4}$; г) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 578. а) 2; б) 4; в) $1,2\sqrt{5}$; г) 5. 579. $0,8\sqrt{5}$. 580. а) $b = \frac{7a}{4}$; б) $b = \frac{3a}{5}$; в) $b = \frac{3a}{2}$; г) $b = \frac{8a}{5}$. 581. а) $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$; б) $\frac{24}{25}$ и $\frac{7}{25}$; в) $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 582. а) $\frac{3}{5}$, $\frac{15}{17}$, $\frac{84}{85}$; б) $\frac{12}{13}$, $\frac{24}{25}$, $\frac{204}{325}$; в) $\frac{12}{37}$, $\frac{24}{25}$, $\frac{924}{925}$. 583. а) 0,8; б) $\frac{15}{17}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 588. а) $\frac{3}{7}$, $\frac{2\sqrt{10}}{7}$; б) $\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\frac{3}{\sqrt{13}}$; в) $\frac{8}{17}$, $\frac{15}{17}$; г) $\frac{9}{41}$, $\frac{40}{41}$. 589. а) $\frac{3}{5}$, $\frac{24}{25}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\frac{4\sqrt{5}}{9}$; в) $\frac{\sqrt{55}}{8}$, $\frac{3\sqrt{55}}{32}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1. 593. а) $\frac{2}{3}$, $\frac{\sqrt{5}}{3}$; 48° 11', 41° 49'; б) $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 63° 26', 26° 34'; в) 0,6; 0,8; 53° 8', 36° 52'; г) $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{13}$, 67° 23'; $\frac{120}{169}$, $\frac{119}{169}$, 45° 14'; д) $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{13}$, 67° 23'; $\frac{24}{25}$, $\frac{7}{25}$, 73° 45'; $\frac{204}{325}$, $\frac{258}{325}$, 38° 53'; е) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 45°. 597. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; в) ни при каких; г) при $a \geq 1$. 599. а) $(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$; б) $(0; \frac{2\sqrt{2}}{3})$; в) $[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}]$; г) $[\sqrt{1-4b^2}; \sqrt{1-b^2}]$. 600. а) $\beta = 45^\circ$; б) $45^\circ < \beta < 90^\circ$; в) $\beta < 45^\circ$; г) $45^\circ \leq \beta < 90^\circ$; д) $\beta \leq 45^\circ$; е) $\beta \neq 45^\circ$. 606. а) 0,4; 2,5; 21° 48', 68° 12'; б) $\frac{3}{7}$, $\frac{7}{3}$; 23° 12', 66° 48'; в) 7, $\frac{1}{7}$; 81° 52', 8° 8'. 607. а) $6+2\sqrt{5}+4\sqrt{2}$. 608. а) $\frac{a^2}{2}(3+\sqrt{3}+3\sqrt{2})$. 610. а) $12x^4+7x^3-8x^2-x+4$; б) $-7c^4-3c^3+3c^2$; в) $y^4-5ay^3+7a^2y^2-3a^3y$; д) $i^4+j^4+k^4-2i^2j^2-2i^2k^2-2j^2k^2$; е) $4+4u^2+u^4-9u^6-6u^3v^2-v^4$. 612. а) $(a^3-b^2)^2$; б) $(2c^5+5y^6)^2$; в) $(5mn^2+6k^2l)(25m^2n^4-30k^2lmn^2+36k^4l^2)$; г) $(6d^2f-5eh^3)(36d^4f^2+30d^2efh^3+25e^2h^6)$; д) $(2u-5j)^3$; е) $8(p+3q)^3$; ж) $u^5(u-1)^3(u^4+u^3+u^2+u+1)$; з) $(c-g)(c+g)(b-h)(b+h)$. 613. а) 5; б) 3; в) 3; г) 5,75. 615. 1,52 км²; 8,2 км²; 0,74 км². 616. 26,75 млн м³; 12,65 млн м³; 41,8 млн м³. 617. 2:5.

Раздел V

- 629.** к) $-\frac{11}{30}$; $\frac{11}{30}$. **630.** д) $-1\frac{2}{3}$; $1\frac{2}{3}$; ж) $-2\frac{4}{7}$; $2\frac{4}{7}$. **631.** в) $-2,5$; 0 ; д) 3 .
- 635.** а) 0 ; $2,5$; б) $-\sqrt{7,5}$; $\sqrt{7,5}$; в) $-0,5$; $0,5$. **636.** б) $-\sqrt{0,5}$; $\sqrt{0,5}$; г) нет корней. **640.** а) 12 см; б) 8 см, 11 см, $\sqrt{185}$ см; 12 см, 12 см, 4 см, $\sqrt{185}$ см, 1 см. **641.** $5\sqrt{3}$ см. **643.** 4 , 5 и 6 . **645.** $2\sqrt{5}$ см; 4 см². **646.** 48 см. **647.** 25° , 130° , 25° . **648.** а) $3(1+\sqrt{3})$ дм; 60° , 75° , 45° ; б) $4,5(3+\sqrt{3})$ дм². **649.** а) 2 см, 2 см, 4 см, $2\sqrt{2}$ см; 135° , 90° , 90° , 45° ; б) 6 см². **650.** а) $5\sqrt{3}$ см, 5 см, 10 см, 10 см; 90° , 90° , 120° , 60° ; б) $37,5\sqrt{3}$ см². **651.** а) $1 \leq x < 1,2$; б) $0,2 \leq x < 0,4$.
- 654.** а) -4 ; 3 ; е) $-1,5$; -1 ; л) $-0,5$. **656.** а) -5 ; $1,5$; б) -1 ; $-\frac{1}{9}$; в) -5 ; 7 ; г) -3 ; б; д) нет корней; е) $-\frac{5}{6}$; ж) $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{3}$; з) 8 ; -11 ; и) нет корней; к) нет корней; л) -5 ; 8 ; м) $1,25$; $1,5$. **657.** а) При $x=2$ и при $x=10$; б) при $y=-2,5$ и при $y=6$; в) при $b=-1$ и при $b=6$; г) при $t=-\frac{4}{3}$ и при $t=\frac{3}{4}$. **658.** а) 3 ; 8 ; б) -1 ; 5 ; в) -7 ; -2 ; г) 6 ; 8 ; д) -1 ; 4 ; е) 3 ; 11 ; ж) -10 ; -1 ; з) -2 ; 3 ; и) -3 ; $0,25$; к) 5 ; 9 ; л) $-\frac{1}{3}$; 2 ; м) -6 ; -5 . **659.** а) $0,5$; 2 ; б) $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$; в) $-0,5$; 2 ; г) $\frac{3 \pm \sqrt{15}}{6}$; д) $0,5$; 3 ; е) $-0,1$; 1 ; ж) нет корней; з) $-0,1$; $\frac{1}{3}$; и) $1,5$; к) $0,3$; л) нет корней; м) нет корней. **660.** а) $-\frac{1}{6}$; б) $0,8$; 1 ; в) 4 ; $6\frac{2}{3}$; г) нет корней; д) -17 ; е) -17 ; 2 ; ж) $0,5$; 3 ; з) $-0,5$; 3 ; и) нет корней; к) $\frac{-7 \pm \sqrt{949}}{30}$; л) $2,4$; $2,75$; м) нет корней. **661.** а) 1 ; 2 ; б) 1 ; 11 ; в) -2 ; -1 ; г) -2 ; 1 ; д) -11 ; 1 ; е) -1 ; 2 ; ж) 5 ; з) нет корней; и) -9 ; к) нет корней; л) 3 ; 8 ; м) -8 ; -3 . **662.** а) 3 ; 5 ; б) -8 ; 7 ; в) -5 ; 4 ; г) -11 ; -5 ; д) 7 ; 14 ; е) -12 ; -10 ; ж) -20 ; 9 ; з) -1 ; 17 ; и) нет корней; к) 16 ; л) 20 ; 30 ; м) -19 ; -10 . **663.** а) 2 ; $2\frac{2}{3}$; б) 4 ; 8 ; в) $0,2$; 3 ; г) -3 ; 7 ; д) -8 ; 10 ; е) -2 ; 24 ; ж) -1 ; $2\frac{7}{15}$; з) нет корней; и) $-2\frac{7}{15}$; 1 ; к) нет корней; л) -2 ; $-\frac{8}{7}$; м) $-\frac{2}{3}$; $1,2$. **664.** а) $-0,2$; 2 ; б) -7 ; 2 ; в) $3 \pm 3\sqrt{2}$; г) -4 ; 5 ; д) $-1\frac{2}{3}$; $-2,5$; е) нет корней; ж) 16 ; 36 ; з) -1 ; $2\frac{7}{15}$; и) $0,2$; к) $-1\frac{2}{11}$; л) $-0,15$; м) $\frac{8}{15}$. **665.** а) $-0,5$; 3 ; б) $\frac{1}{6}$; 2 ; в) -1 ; 9 ; г) $-3 \pm 2\sqrt{6}$; д) -8 ; 3 ; е) -2 ; 3 ; ж) $\pm\sqrt{18,5}$; з) нет корней; и) $\pm\sqrt{10}$; к) $\pm\sqrt{3}$; л) нет корней; м) ± 2 .
- 666.** а) $-\frac{5}{6}$; 5 ; б) $-0,7$; 10 ; в) $-\frac{1}{3}$; 2 ; г) нет корней; д) $-0,5$; 2 ; е) $-2\frac{1}{3}$; $-0,4$; ж) $15,8$; 18 ; з) $\frac{-241 \pm \sqrt{301}}{270}$. **677.** 40° , 70° , 70° . **668.** 110° , 135° , 70° , 45° . **669.** 72° , 72° , 36° . **670.** 20° , 80° , 80° . **671.** 6 дм, 3 дм, 3 дм, $3\sqrt{3}$ дм. **672.** 50 г, 100 г. **673.** 180 кг. **674.** 17 кг. **675.** а) $0,5 < x \leq 1$; б) $3,5 < x \leq 4$. **678.** а) $\pm\sqrt{3}$; ± 2 ; б) $\pm 2\sqrt{2}$; в) ± 1 ; г) $\pm 2,5$; д) ± 2 ; ± 4 ; е) $\pm 0,5\sqrt{10}$; $\pm 0,5\sqrt{2}$; ж) $\pm \frac{3}{8}$; з) ± 2 ; ± 5 ; и) $\pm 1,5\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{2}$; к) $\pm\sqrt{\frac{11}{8}}$; л) нет корней; м) $\pm\sqrt{10}$.

679. а) $-1; 0; 2; 3$; б) $-1; 0; 4; 5$; в) $-3 \pm \sqrt{5}$; г) $-6; -4$; д) $-2; -1$; е) $-0,5; 0; 1; 1,5$. **680.** а) $0; 1$; б) $-3; 8$; в) 3 ; г) $-1\frac{2}{3}; 12$; д) $-2; -1,5$; е) $-1,8; 5$; ж) 1 ; з) $3\frac{1}{3}; 7$; и) $1\frac{1}{3}; 5$; к) $-20; 40$; л) $-0,2$; м) $-\frac{2}{3}$; н) $-\frac{2}{3}$. **681.** а) $-\frac{4}{3}; 2$; б) $1; 2$; в) $1; 10$; г) $\frac{2}{11}$; д) $-3,5; 5$; е) нет корней; ж) $-3,25; 1$; з) 6 ; и) 4 ; к) ± 4 ; л) $-9; 1$; м) -3 ; н) $\frac{2}{3}$. **682.** а) 0 ; б) нет корней; в) $\frac{-4 \pm \sqrt{30}}{2}$; г) 2 ; д) 2 ; е) 2 ; ж) 2 ; з) $4 \pm 4\sqrt{2}$. **683.** а) $-0,5; 2$; б) $3; \frac{47}{73}$; в) $-1,4; 5$; г) 2 ; д) $-6\frac{3}{7}$; е) $-\frac{2}{3}; -4,7; -1$; ж) 1 ; з) 0 . **684.** а) $-1\frac{2}{3}; 0$; б) $-1\frac{1}{3}$; в) $4; 5$; г) $-1; 7$; д) -1 ; е) $-2\frac{8}{15}$; ж) $-8,5; -2$; з) $-4; 9$; и) 2 . **685.** а) $5; 6$; б) $-3; \frac{2}{3}$; в) $\frac{-5 \pm \sqrt{8}}{2}$; г) $2,5; 5$; д) $-5,6; 4$; е) $5,2; 10$; ж) $9,2; 14$; з) $8,25$; и) 12 . **686.** а) $-2 - \sqrt{6}; -2 + \sqrt{6}$; б) $-\sqrt{3} - 3; -\sqrt{3} + 1$; в) 0 ; г) $\sqrt{5}$; д) 0 ; е) $\sqrt{3}$. **687.** а) При $y = -1,25$; б) при $x = \pm\sqrt{2}$; в) при $k = -1$ и при $k = 6$; г) при $m = -0,6$ и при $m = 5$; д) при $a = 2$; е) ни при каких. **688.** а) $\pm 3; \pm 5$; б) ± 4 ; в) нет корней; г) ± 2 ; д) $\pm 0,5; \pm 2$; е) нет корней; ж) $\pm 0,5; \pm 3$; з) ± 1 ; и) $\pm \frac{5}{3}$; к) $\pm 1; \pm \frac{8}{5}$; л) ± 8 ; м) $\pm \frac{1}{3}$. **689.** 120° . **690.** 60° . **691.** $4(3 + 2\sqrt{3})$ см². **692.** $300\sqrt{3}$ см²; $350\sqrt{3}$ см². **693.** 2868 тыс. человек, 1454 тыс. человек, 1016 тыс. человек, 993 тыс. человек. **703.** 19. **704.** 2; -8 . **706.** 15. **711.** г) $6x^2 - 5x + 1 = 0$; к) $x^2 + (3 + \sqrt{5})x + 3\sqrt{5} = 0$. **712.** а) 7; б) $-0,25$; в) 6; г) -35 . **713.** а) $x^2 + 16x + 48 = 0$; б) $x^2 + 4x + 3 = 0$; в) $x^2 + 2x - 3 = 0$; г) $x^2 + 12x + 32 = 0$; д) $x^2 - 4x - 96 = 0$; е) $x^2 - 40x + 144 = 0$. **714.** а) $(a - 1)(3a - 5)$; б) $(m - 1)(4m - 3)$; в) $(4t - 3)(3t - 2)$; г) $(3b - 2)(2b - 1)$; д) $(3x + 4)^2$; е) $(5n + 4 - 2\sqrt{5})(5n + 4 + 2\sqrt{5})$; ж) $(1 - 2l)(l - 2)$; з) $(8y + 1)(1 - y)$. **715.** а) $r + 2$; б) $b + 6$; в) $\frac{1}{c - 9}$; г) $\frac{1}{d + 7}$; д) $\frac{x + 1}{x - 1}$; е) $\frac{y + 2}{y - 3}$; ж) $\frac{2a + 7}{7a + 2}$; з) $\frac{3 - 5s}{10s + 7}$; и) $\frac{z - 2}{2z - 1}$; к) $\frac{t + 3}{3t + 1}$; л) $\frac{r + 1}{r - 1}$; м) $\frac{v - 9}{v + 8}$. **716.** а) $x(x - 1)(x - 2)$; б) $y(y + 1)(y + 7)$; в) $z(z + 7)(z - 3)$; г) $t(t - 3)(t - 4)$; д) $r(r + 2)(r - 11)$; е) $v(4v + 3)(2v + 1)$. **717.** а) $\frac{1}{a - 4}$; б) $-\frac{1}{b + 4}$; в) $-\frac{1}{z + 1}$; г) $\frac{t - 1}{t(t + 10)}$. **718.** а) $-\frac{1}{3}$; б) $1\frac{1}{36}$; в) $-2\frac{1}{18}$; г) $\frac{55}{216}$. **719.** а) $6\sqrt{2}$ см; б) $3\sqrt{7}$ см; в) $9\sqrt{7}$ см²; г) $36\sqrt{7}$ см²; д) $36(1 + \sqrt{7})$ см²; е) $24(1 + \sqrt{2})$ см. **720.** $8(2 + \sqrt{3})$ см². **723.** 4,5 см и 9 см или $5\frac{1}{7}$ см и $10\frac{2}{7}$ см. **724.** 105 тыс. км², 77 тыс. км², 11,5 тыс. км², 8,6 тыс. км². **725.** 1972 м, 3087 м, 2256 м, 1338 м. **726.** 12 г. **727.** 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 12, 21, 24, 42. **728.** 64 или 256. **729.** а) 11 и 12; б) 17 и 18. **730.** а) 13 и 15; б) 29 и 31. **731.** $\frac{5}{6}$. **732.** $\frac{5}{6}$ или $\frac{11}{12}$. **733.** $\frac{3}{8}$. **734.** 2 м, 4 м. **735.** 4 м, 6 м. **736.** 5 дм, 6 дм, 7 дм; $2,4\sqrt{6}$ дм, $2\sqrt{6}$ дм, $\frac{12\sqrt{6}}{7}$ дм. **737.** 60 см². **738.** 8 см, 15 см, $7\frac{1}{17}$ см. **739.** 3 м, 4 м. **740.** 60 км/ч, 40 км/ч. **741.** 18 км/ч, 50 км/ч. **742.** 52 км/ч. **743.** 6 км/ч. **744.** 1 км/ч. **745.** 12 ч, 18 ч.

- 746.** 12 ч, 20 ч. **747.** 54 км/ч, 81 км/ч. **748.** 24 м × 30 м. **749.** а) 8 см, 15 см; б) 6 дм, 8 дм; в) 4 см, 10 см. **750.** 80 км/ч. **751.** За 30 мин.
752. 160 ч, 20 %. **753.** а) $19\sqrt{2}$; б) $15\sqrt{2} - \sqrt{5}$; в) $-2\sqrt{6}$; г) $3\sqrt{3}$; д) $-1,5\sqrt{2}$;
 е) $6,4\sqrt{6} - 1\frac{1}{3}\sqrt{15}$. **754.** а) $x^2 - 2|y| - 1$; б) $\frac{1-|a|}{b^2} - \frac{b}{|a|}$; в) $-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}m^2 + m$;
 г) $k^2d - \frac{k^2l^2|a|}{d} + \frac{k^3}{l}$. **755.** а) $\frac{1}{14}$; б) 4,5. **757.** $\frac{x + \sqrt{x}}{x}$; б) $\frac{\sqrt{a+y}}{y}$; в) $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$;
 г) $\frac{3\sqrt{5}-10}{20}$; д) $\frac{1+8m\sqrt{m}}{1-4m}$; е) $\frac{s^3t\sqrt{t}-8}{s^2t-4}$. **760.** Ни одним. **765.** а) 1; б) $\frac{1}{4}$;
 в) $-\frac{1}{9}$; г) $-\frac{1}{8}$. **766.** а) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; б) a — любое число; в) $(-3; 3)$.
767. а) $(-2; 2)$; б) $[-3; 3]$; в) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; г) $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.
772. а) $u = -3,5t^2 + 4$; $(-\frac{8}{7}; 0)$, $(\frac{8}{7}; 0)$; б) $v = \frac{5}{8}r^2 - 4$; $(-\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}; 0)$, $(\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}; 0)$.
777. а) $u = -3,5(t+4)^2$; $(0; -56)$; б) $v = \frac{5}{6}(r-4)^2$; $(0; 13\frac{1}{3})$. **781.** При $p = 0$;
 $(2; 4)$, $(1; 1)$; при $p = 4$; $(2; 4)$, $(9; 25)$. **782.** При $a = 7 - \sqrt{3}$; $(7; -9)$ и
 $(7\frac{1}{3} - 2\sqrt{3}; -9\frac{1}{3} + 2\sqrt{3})$; при $a = 7 + \sqrt{3}$; $(7; -9)$ и $(7\frac{1}{3} + 2\sqrt{3}; -9\frac{1}{3} - 2\sqrt{3})$.
783. а) $y = 0,2x^2 + 4$; б) $y = 0,2x^2 - 4,5$; в) $y = 0,2(x + 3,5)^2$; г) $y = 0,2(x - 6)^2$;
 д) $y = -0,2x^2 + 3$; е) $y = -0,2x^2 - 7$; ж) $y = -0,2(x + 5)^2$; з) $y = -0,2(x - 5,2)^2$.
786. а) $(3; -4)$; б) $(-4; 2)$; в) $(-5; -2)$; г) $(-1,5; -3,5)$. **788.** а) $(0; 2)$;
 б) $(0; -6)$; в) $(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$; г) $(\frac{1}{8}; \frac{1}{16})$; д) $(0; -3,2)$; е) $(-1\frac{1}{8}; 5\frac{1}{16})$. **789.** а) $(0; 0)$;
 б) $(2; 0)$; в) $(-0,5; 0)$; г) $(-\frac{2}{3}; 0)$. **791.** а) $(1; 0)$; $(2; 0)$; $(0; 2)$; б) $(1; 0)$;
 $(0,5; 0)$; $(0; -1)$; в) $(0; -8)$; г) $(\frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}; 0)$; $(0; 8)$. **792.** а) $y = 3(x - 1)^2 -$
 -2 ; б) $y = -(x + 1)^2 + 5$; в) $y = 5x^2 - 10x + 2$; г) $y = -3x^2 + 5x - 4$. **793.** $y =$
 $= -\frac{2}{3}(x + 1)(x - 3)$. **798.** а) $(a - 1)(7a + 8)$; б) $(x - 3)(x - 5)$; в) $(b + 10)(b - 11)$;
 г) $(y + 1)(5y + 3)$. **799.** а) $-\frac{7}{7a + 8}$; б) $\frac{x - 3}{x + 5}$; в) $\frac{b + 2}{b + 10}$; г) $\frac{11y - 14}{5y + 3}$. **800.** 100 мм.
801. 24 см. **802.** 8 см, 4 см. **803.** $16\sqrt{3}$ см². **805.** $16\sqrt{2}$ см². **806.** 438;
 102. **807.** 11 г. **808.** 52, 33, 15. **809.** 70, 21, 9. **810.** 10 или 12. **812.** 4 : 1.
813. 7 способов. **815.** Тремя способами.

Раздел VI

- 824.** а) 8 см; б) 2 см; в) 4,5 см. **825.** $1\frac{1}{35}$ см или 21,6 см. **826.** $\frac{lx}{x+y}$, $\frac{ly}{x+y}$.
828. а) 15 см; б) 6 см; в) 52 см. **829.** 56,25 мм, 90 мм. **830.** 42 см. **835.** а) 9,6 см;
 14,4 см; б) 15 м; в) 10 см. **836.** 15,75 см. **837.** 10,5 см; 7,5 см. **838.** 30 см,
 50 см. **839.** 5 см, 10 см, 15 см. **840.** 11,25 см, 18,75 см. **841.** 50 см, $16\frac{2}{3}$ см.
842. $3\sqrt{5}$ см, 18 см; 31,5 см; 31,5 см. **843.** 6 см, 9 см. **844.** а) -6; 2; б) -2,5;
 0; 1. **845.** а) $(-\infty; -\frac{3}{22}]$; б) $[-4, 24; +\infty)$. **847.** 15 и 12. **848.** 7. **851.** 16 см; 9 см.

852. 65 мм, 39 мм, 52 мм. **853.** На 6 см. **854.** а) 30 мм; б) 15 см. **855.** 84 мм или 156 мм. **856.** 50 мм, 100 мм, 150 мм, 200 мм. **857.** 28,8 мм; $13\frac{1}{3}$ мм; 10 мм; $16\frac{2}{3}$ мм. **859.** 10 см и 35 см. **860.** 30 мм, 48 мм. **861.** 18 см. **863.** $\frac{mn}{m+n}$. **866.** 30 мм, 24 мм. **867.** 180 мм, 400 мм, 9 : 20. **868.** 12 см; 3 : 4. **869.** На 256 мм. **870.** 50 мм. **871.** $\frac{a-b}{b}c$. **872.** 14 см, 16,8 см. **873.** б) $\frac{bd}{b+d}$. **875.** $\frac{ah}{a+h}$. **876.** 36 мм, 20 мм. **877.** а) $\frac{-5 \pm \sqrt{1169}}{26}$; б) 0,5; 1; в) -7; 1; г) нет корней. **879.** а) A(1; 7), B(6; 5), C(-2; 1); б) 18; в) $\sqrt{29}$, $3\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$; г) $\frac{9}{\sqrt{5}}$, $\frac{12}{\sqrt{5}}$, $\frac{36}{\sqrt{29}}$. **880.** а) (0; -6), (3; 0), $(-\frac{2}{3}; 0)$; б) (4; 14), (2; -8), $(\frac{1}{3}; -8)$; в) (5; 34), (1; -10), $(\frac{4}{3}; -10)$. **881.** 50 км/ч. **882.** 9 876 312. **887.** 30 мм, 20 мм, 35 мм, 25 мм, 10 мм. **888.** 12 дм, 20 дм, 28 дм, 44 дм. **889.** 200 мм, 500 мм. **890.** $\sqrt{2} : 1$. **897.** а) 9 : 25; б) 25 : 49. **898.** а) $\sqrt{3} : 4$; б) $\sqrt{3} : (4 + \sqrt{3})$. **899.** $\approx 11,83$ м. **900.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{4}$. **901.** 24 дм² или 121,5 дм². **903.** $1 : (\sqrt{2} - 1) : (\sqrt{3} - \sqrt{2})$. **904.** 3000 дм². **906.** а) $\frac{a-5}{a-3}$; б) $\frac{2(b-7)}{3(b+1)}$; в) $\frac{2(c+7)}{3(c+10)}$; г) $\frac{3(5-d)}{2(d-7)}$. **908.** 5 м × × 9 м; 12 м × 3 м. **909.** 60 км/ч. **910.** $\frac{5}{8}$. **911.** 7553. **913.** 14. **917.** а) 5; б) 61; в) 13; г) $3\sqrt{97}$; д) $4\sqrt{2}$; е) 12. **918.** а) 12; 9; 16; б) $7\frac{1}{17}$; $3\frac{13}{17}$; $13\frac{4}{17}$; в) 6,72; 1,96; 23,04; г) 20,16; 5,88; 69,12. **919.** а) 4,8; 3,6; 6,4; б) $8\frac{32}{41}$; $1\frac{40}{41}$; $39\frac{1}{41}$; в) $36\frac{12}{73}$; $31\frac{41}{73}$; $41\frac{32}{73}$; г) $10\frac{50}{61}$; $1\frac{60}{61}$; $59\frac{1}{61}$. **922.** 75 мм, 147 мм. **923.** 150 мм, 200 мм, 250 мм. **924.** 108,8 см; 382,5 см. **926.** (3, 4, 5). **927.** а) 37 см; б) $\sqrt{a^2 + b^2}$. **928.** 109 мм. **929.** $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$. **930.** 28 мм, 96 мм. **931.** 25. **932.** 17. **933.** 26, $4\sqrt{61}$, $2\sqrt{601}$. **934.** а) 17; б) $\frac{289}{15}$; $\frac{289}{8}$; $\frac{4913}{120}$. **935.** а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{8}}$; $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{2}}$; $\sqrt{\frac{10+5\sqrt{5}}{8}}$. **936.** 56 или 4. **938.** $\sqrt{3}$. **940.** а) 5; б) -3; в) 8; г) -14. **944.** $10(\sqrt{2} + 1)$ А. **945.** $6(\sqrt{2} + 2)$ см; $6(\sqrt{2} + 1)$ см. **946.** $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. **963.** $\frac{n}{2m}$, $\frac{2m^2 - n^2}{2m^2}$. **971.** $\frac{b^2}{4} \operatorname{tg} \alpha (2 + \sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 \alpha})$. **976.** а) 11,2 см; б) 160 мм. **977.** 62 см; 76 см. **978.** 6 дм, 8 дм; 6 дм. **979.** 65 %, 80 %. **980.** 50 %, 75 %. **981.** а) $\frac{c-3}{c+4}$; б) $\frac{d^{n-2}(d-1)}{d+2}$; в) $\frac{2e+3}{e-2}$; г) $f-1$. **984.** 6. **989.** а) $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{24}$; $53^\circ 8'$, $73^\circ 44'$; б) 1, 0; 45° , 90° ; в) $\frac{3}{\sqrt{91}}$; $\frac{41}{3\sqrt{91}}$; $72^\circ 33'$, $34^\circ 55'$. **993.** а) При $a \neq 0$; б) при $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) ни при каких; г) при $a = 2$. **1003.** а) $9\sqrt{2}$ см и $22,5\sqrt{2}$ см; б) 16 см и 40 см или 12 см и 30 см. **1004.** а) $4\sqrt{34}$, $2\sqrt{34}$, $2\sqrt{170}$; б) 136; в) $2\sqrt{34}$,

$4\sqrt{34}$, $0,8\sqrt{170}$; г) $17\sqrt{2}$, $4\sqrt{17}$, $\sqrt{170}$; д) 34; е) $y = 0,6x + 8$; $y = -\frac{5}{3}x - 14\frac{2}{3}$;
 $y = \frac{11}{7}x - 1\frac{5}{7}$; ж) $y = \frac{1}{13}x + 2\frac{10}{13}$; $y = x + 4$; $y = 4x + 8$; з) $y = 0,6x + 1,2$;
 $y = -\frac{11}{9}x + 8$; $y = \frac{11}{7}x + 8$. **1006.** а) 10-угольник; б) 6-угольник; в) нет;
г) 5-угольник. **1007.** а) $(x + 2)(x + 5)$; б) $(z - 9)(z + 12)$; в) $(2a - 2,4)(a + 2,7)$;
г) $(6b + 5)(5b + 2)$. **1014.** 130 см^2 . **1015.** 546 дм^2 . **1016.** а) $(18 + 2\sqrt{3}) \text{ см}$;
 $14\sqrt{3} \text{ см}^2$; б) $(20 + 4\sqrt{3}) \text{ дм}$; $\frac{40\sqrt{3}}{3} \text{ дм}^2$; в) $4(4 + \sqrt{2}) \text{ м}$; 24 м^2 ; г) $(230 + 50\sqrt{3}) \text{ мм}$;
 $3250\sqrt{3} \text{ мм}^2$. **1017.** а) (2; 1); б) (4; 8); в) (0; 3); г) (-2; 6,5). **1018.** $y = -2,75x + 11$.
1019. 530. **1022.** 9000 м. **1023.** 1. **1025.** а) $\frac{5}{13}$; 2,4; $\frac{5}{12}$; б) $-\frac{5}{13}$; -2,4; $-\frac{5}{12}$;
в) $\frac{24}{25}$; $\frac{7}{24}$; $\frac{24}{7}$; г) $-\frac{7}{25}$; $-\frac{24}{7}$; $-\frac{24}{24}$; д) $\frac{\sqrt{11}}{6}$; $5\frac{\sqrt{11}}{11}$; $\frac{\sqrt{11}}{5}$; е) $-\frac{2}{7}$; $-1,5\sqrt{5}$;
 $-\frac{2\sqrt{5}}{15}$. **1026.** а) $\frac{15}{17}$; $\frac{15}{8}$; $\frac{8}{15}$; б) $\frac{15}{17}$; $-\frac{15}{8}$; $-\frac{8}{15}$; в) $\frac{40}{41}$; $-\frac{40}{9}$; $-\frac{9}{40}$; г) $\frac{9}{41}$;
 $\frac{9}{40}$; $\frac{40}{9}$; д) $\frac{\sqrt{23}}{12}$; $\frac{\sqrt{23}}{11}$; $\frac{11}{\sqrt{23}}$; е) $\frac{7}{11}$; $-\frac{7\sqrt{2}}{12}$; $-\frac{3\sqrt{2}}{7}$. **1027.** а) $\frac{20}{29}$; $\frac{21}{29}$;
 $\frac{21}{20}$; б) $\frac{20}{29}$; $-\frac{21}{29}$; $-\frac{21}{20}$; в) $\frac{12}{37}$; $-\frac{35}{37}$; $-\frac{35}{12}$; г) $\frac{35}{37}$; $\frac{12}{37}$; $\frac{12}{35}$; д) $\frac{12}{13}$; $-\frac{5}{13}$;
 $-\frac{5}{12}$; е) $\frac{3}{7}$; $\frac{2\sqrt{10}}{7}$; $\frac{2\sqrt{10}}{3}$. **1028.** а) $\frac{60}{61}$; $-\frac{11}{61}$; $-\frac{60}{11}$; б) $\frac{9}{41}$; $\frac{40}{41}$; $\frac{9}{40}$; в) $\frac{24}{25}$;
 $\frac{7}{25}$; $\frac{24}{7}$; г) $\frac{13}{25}$; $-\frac{84}{85}$; $-\frac{13}{84}$; д) $\frac{40}{41}$; $\frac{9}{41}$; $\frac{40}{9}$; е) $\frac{5}{9}$; $-\frac{2\sqrt{14}}{9}$; $-\frac{5}{2\sqrt{14}}$.
1030. а) $\cos^2 \alpha$; б) $\sin^2 \beta$; в) $-\cos^2 \gamma$; г) $-\sin^2 2\omega$; д) $\cos^2 \beta$; е) $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$. **1031.** $\pm \frac{3}{4}$.
1032. а) $\frac{5}{3}$; б) $\frac{1}{3}$; в) -7; г) 2. **1036.** а) 1; б) 1; в) 1; г) 0. **1038.** а) $\cos 12^\circ$;
б) $-\sin 33^\circ$; в) $-\text{tg } 6^\circ$; г) $\sin 9^\circ$; д) $-\text{ctg } 11^\circ$; е) $\text{ctg } 44^\circ$; ж) $\sin 21^\circ$; з) $\text{tg } 44^\circ$.
1039. а) -1; б) 0; в) 0. **1041.** а) 4 : 3; б) 3 : 8; в) 3 : 2; г) 6 : 5. **1042.** а) $\frac{h^2}{2} \times$
 $\times (\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta)$; б) $\frac{h_1 h_2}{2 \sin \gamma}$; в) $\frac{c^2}{2(\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta)}$. **1044.** $\frac{11\sqrt{3}}{2}$. **1045.** $\frac{1}{2}(mn \sin \alpha +$
 $+ np \sin \beta + mp \sin \gamma)$. **1046.** а) 40; 840; б) $46^\circ 29'$; $43^\circ 31'$; в) $1^\circ 29'$;
 $1^\circ 29'$; г) $28\frac{28}{29}$; $\frac{840\sqrt{2}}{21}$; 29; д) $21^\circ 46'$; $1^\circ 58'$; е) 42; $8,4\sqrt{29}$; $2\sqrt{541}$;
ж) $23^\circ 15'$; $4^\circ 27'$; з) 40; $\frac{40\sqrt{58}}{7}$; $\sqrt{2041}$. **1047.** $19^\circ 11'$; $36^\circ 2'$; $124^\circ 47'$;
 $24^\circ 57'$; $55^\circ 13'$; $90^\circ 50'$ или $17^\circ 45'$; $40^\circ 15'$; 122° ; $10^\circ 19'$; $29^\circ 56'$;
 $139^\circ 45'$. **1048.** 39,5 мм; 14 мм. **1050.** 278,8 мм, 84,8 мм, 175,4 мм.
1051. 900 см^2 . **1052.** 159 м. **1053.** $\approx 140 \text{ м}$. **1054.** а) $3\sqrt{41}$; $2\sqrt{41}$; $\sqrt{533}$;
б) 123; в) $3\sqrt{41}$; $2\sqrt{41}$; $6\sqrt{\frac{41}{18}}$; д) 90° ; $33^\circ 41'$; $56^\circ 19'$; е) 20,1; 10,9;
14,5. **1055.** 7,2 м/с, 6,4 м/с. **1056.** 30 кН, 50 кН. **1057.** 16 м, 63 м, 65 м.
1062. 6 см.

Материал для повторения

1073. а) 110; б) 85; в) 38. **1075.** а) $\frac{6}{11}$; б) $\frac{5}{22}$; в) $1\frac{472}{999}$; г) $11\frac{1}{35}$; д) $\frac{37}{330}$;
е) $9\frac{8}{33}$. **1100.** а) $36 - 36\sqrt{2} + 27\sqrt{3}$; б) 0; в) $2\sqrt{7}$; г) -4; д) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$; е) 0.

1104. а) 6; б) -33; в) 2; г) 2. **1106.** а) 2; б) 2,5; в) $\sqrt{2}$; г) -3,75; д) -0,5; е) 0.

1107. а) -1; б) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; в) -1; г) 0; д) -2; е) $\sqrt{2}$. **1112.** а) $(a-5)(3a-1)$;

б) $(2x+3y)(4x+y)$; в) $(x-c)(x-2y)$; г) $(a-b)(2a+3x)$; д) $x(x+1)(a+b-c)$;

е) $(a-b)(x^2+x-1)$; ж) $(x-a)^2(x+a)$; з) $(a+x)^2(a-x)$; и) $(x-2c)(x-2y)$;

к) $(a+b)(a-2c)$; л) $(x-y)(2x+2y-a)$; м) $(x-c)(x-2y)$. **1113.** а) $(x-a-1) \times$

$\times (x-a+1)$; б) $(x+2a-2)(x+2a+2)$; в) $(3x+2a-3)(3x+2a+3)$; г) $(2x-$

$-3a-2)(2x-3a+2)$; д) $(2x+y)(4x+y)$; е) $(x+3y)(x+5y)$; ж) $(a-x)(3a-x)$;

з) $(2a-3x)^2$. **1114.** а) $(u^2-u-1)(u^2-u+1)$; б) $(v^2-v-1)(v^2+v+1)$; в) $(w^4-$

$-w^2-1)(w^2+w+1)(w^2-w+1)$; г) $(x+y+1)(x-y+1)$; д) $(2t-1)(2z-1)$;

е) $(a-b+1)(a^2+ab+b^2-a-2b+1)$; ж) $(2c+d+2)(4c^2-2cd-4c+d^2+4d+4)$;

з) $-4ef(e-f)(e+f)$; и) $2i(i+h)^2(i-h)^2(i^2+3h^2)$. **1115.** а) $(r^2-2r-4)(r^2+2r-4)$;

б) $(s^2-2s+3)(s^2+2s+3)$; в) $(w^2-6w+18)(w^2+6w+18)$; г) $(g^2+1)(g^2-g-1)$;

д) $(q^4+4)(q^4-q^2-4)$; е) $(a-b)(a+2b-1)$; ж) $4k(l+1)$; з) $(c-d-1)(c-d+1)$.

1116. а) $4i(i+2)$; б) $(a+b-c)(a+b+3c)$; в) $(1+p-q+r)(1-p+q-r)$;

г) $(n-p)(m+n)(m+p)$; д) $(t-s)(r-s)(r-t)$; е) $(e+f)(d+e)(d+f)$; ж) $(x+y) \times$

$\times (y+z)(x+z)$; з) $-3(k+l)(m+k)(m+l)$. **1117.** а) $4(i^2+j^2+k^2)$; б) $x^{64}-y^{64}$.

1118. а) 26; б) -19,5. **1119.** а) -1; б) 1. **1120.** а) 4; б) 4. **1123.** а) $\frac{4a^2}{5b}$; б) $\frac{3r^3}{8t^2}$;

в) $\frac{m^2+n^2}{m}$; г) $\frac{cu+dv}{cu-dv}$; д) $\frac{4}{25}$; е) $\frac{16y^2}{25}$. **1124.** а) $\frac{1}{a^2+a+1}$; б) b^2+

$+2b+2$; в) $-\frac{9c^2+12cd^2+16d^4}{3c+4d^2}$; г) $\frac{e^{11}+1}{e^{11}}$; д) $\frac{h-f-g}{h+f+g}$;

е) $\frac{x^n}{x-2}$; ж) $\frac{y^3-y^2-2y+2}{y^4-y^3+y^2-y+1}$; з) $z^{32}+z^{16}+1$. **1125.** а) $\frac{x^2-ax+b^2}{x^2+ax-b^2}$;

б) $\frac{y+r}{p+q-y}$; в) $\frac{uw}{(u+w)^2-v^2}$; г) $\frac{i+j+k}{2}$. **1126.** а) -4; б) 17. **1127.**

а) $\frac{u(u-3)(u+3)(u+2)}{(u-3)(u+2)}$; при $u=-2$ и $u=3$ выражение не имеет

значения; при $u=-1,5$ значение выражения равно -2,25;

б) $\frac{(v-1)(v+1)(v^2+1)(v^2+v+1)(v^2-v+1)(v^4-v^2+1)}{(v-1)(v^2+1)(v^2+v+1)(v^2-v+1)}$; при $v=-2$ значение

выражения равно -13; при $v=3$ значение выражения равно 292; при $v=1$

выражение не имеет значения. **1128.** а) $\frac{2ab+3b}{2a-3}$; б) $\frac{m+3n}{m^2-6mn+9n^2}$; в) $u+4$;

г) 1,5; д) $-\frac{1}{w+2}$; е) $\frac{1}{p-3}$. **1130.** а) 1; б) $\frac{1}{6}$; в) 1; г) 2. **1131.** а) $\frac{2c+1}{2c-1}$; б) -а;

в) $-\frac{2}{3}$; г) $-\frac{5b}{2b+5}$. **1132.** а) $\frac{a+2b}{2a}$; б) $\frac{5a+b}{4a^2}$; в) $\left(\frac{a+b}{b}\right)^2$; г) $\frac{4(a-b)}{5a}$.

1133. а) $-\frac{5a+1}{12}$; б) $\frac{1}{a^2-1}$; в) $\frac{2(3b-2)}{3(3b+a)}$; г) $-\frac{a^2+8a-4}{(a+2)^2}$; д) $-\frac{6a+b}{2a}$; е) $a-1$.

1134. а) $\frac{a(a+b)}{b(a-b)^2}$; б) $\frac{-6mn(2m+3n)}{2m-3n}$; в) 0; г) $\frac{11u+v}{6u-6v}$; д) 1; е) $\frac{3}{2c-4}$;

ж) $\frac{-d^2+de+5d}{(d-e)^2}$; з) $\frac{4-r-s}{r^2-rs}$. **1135.** а) 4; б) 3,2; в) $\frac{1}{16}$; г) 0,75.

1136. а) $\frac{4a^2-3ab+8a-6b}{a-2}$; б) $\frac{w^2-w-1}{w-3}$; в) $\frac{h^{5n+5}}{32g^{5n-5}}$; г) $\frac{x-y^2}{a^2}$;

д) $\frac{2r-q}{2r+q}$; е) u^4v^{17} . **1137.** а) $\frac{u^2+uq-ur-qr}{u^2-2up+p^2}$; б) $\frac{a+2b}{2a-b}$; в) $\frac{k-l-1}{k+2l}$; г) y^6-8 ;

д) $\frac{1}{x+2}$; е) $\frac{z+2}{z^2-3z+2}$; ж) $\frac{r-s}{e^2+s^2}$; з) $\frac{l(n-m-l)}{2}$. **1138.** а) $t = \frac{1}{a^2-b^2}$;

б) $t = -2c - 3$; в) $t = m + n$; г) $t = p - r$. **1139.** а) Выражение тождественно равно выражению 0, поэтому не зависит от значения переменной x ; б) выражение тождественно равно выражению $-2a$, поэтому не зависит от значения переменной b ; в) выражение тождественно равно выражению $\frac{1}{r^2s^2}$, поэтому его значение положительно при всех наборах значений переменных r и s из области определения; г) выражение тождественно равно выражению $\frac{1}{v^2}$,

поэтому его значение положительно при всех наборах значений переменных u и v из области определения; д) выражение тождественно равно выражению $-(j+1)^2$, поэтому его значение не положительно при всех наборах значений переменных i и j из области определения и не зависит от значения переменной i ; е) выражение тождественно равно выражению $\frac{64}{1-y^{64}}$,

поэтому его значение отрицательно при любом значении переменной y , которое больше единицы. **1140.** а) $\frac{24}{37}$; б) $\frac{291}{637}$; в) $\frac{803}{2128}$.

1141. а) $x + \sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{3}}{\sqrt{a} - \sqrt{3}}$; в) $\frac{c^2 + 2\sqrt{3}}{r^2 - 2\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{-x}$. **1142.** а) $-5xy^3\sqrt{3x}$;

б) $-2ab^3\sqrt{-2ab}$; в) $(m+n)\sqrt{m-n}$; г) $\sqrt{\frac{u}{v}}$. **1143.** а) $\frac{x+y}{x}$; б) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; в) 2;

г) $b - a$. **1144.** а) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$; б) $-\frac{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a}}$; в) $\frac{u}{u - \sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; д) $\frac{11p + \sqrt{3}}{6(p - \sqrt{3})}$;

е) $-4st$. **1145.** а) $\frac{1}{a}$; б) $\frac{l(l-2)}{l-1}$; в) $\sqrt{b} + \sqrt{c}$; г) 1; д) 1; е) $\frac{3(p+q)}{p-q}$.

1146. а) $-b\sqrt{2}$, если $3a \geq b^3$; $-\sqrt{\frac{6a}{b}}$, если $b^3 > 3a$; б) u ; в) $\frac{\sqrt{1-v} + \sqrt{-v}}{\sqrt{2}}$.

1147. а) -1; б) 2. **1148.** а) $|\sin\alpha - \cos\alpha|$; б) $|\sin\beta - \cos\beta|$; в) 2, если $\cos\alpha \geq 0$;

-2, если $\cos\alpha \leq -\frac{1}{2}$; $4\cos\alpha + 1$, если $-\frac{1}{2} < \cos\alpha < 0$; г) 1, если $\sin\beta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$2\sqrt{2}\sin\beta + 1$, если $\sin\beta > \frac{\sqrt{2}}{2}$. **1157.** а) 13; б) 2; в) 9; г) 0,2; д) -6; е) 5;

ж) 10; з) 11. **1158.** а) -1; $-\frac{1}{8}$; б) нет корней; в) 5; г) 0,5; д) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$; е) $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$;

ж) -1 ; з) $-0,4$; и) нет корней; к) 0 ; $0,5$; л) -4 ; $0,6$; м) $-1,25$; 3. **1159.** а) $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$;
 б) $2,5$; 3 ; в) нет корней; г) -8 ; д) -2 ; $-\frac{7}{3}$; е) 0 ; $\frac{3}{7}$; ж) нет корней; з) 4 ;
 и) $-0,25$; 1 ; к) $\frac{2}{3}$; л) $-0,4$; $0,5$; м) $-0,8$. **1160.** а) -20 ; 40 ; б) -12 ; -9 ;
 в) 9 ; 12 ; г) -12 ; -10 ; д) 10 ; 12 ; е) -12 ; -11 ; ж) 11 ; 12 ; з) -13 ; -11 ; и) 11 ; 13 ;
 к) -13 ; -12 ; л) -40 ; -20 ; м) 12 ; 13. **1161.** а) -2 ; 1 ; б) -1 ; 2 ; в) -3 ; 2 ; г) -2 ;
 3 ; д) -4 ; 3 ; е) -3 ; 4 ; ж) -5 ; 4 ; з) -4 ; 5 ; и) -7 ; 6 ; к) -6 ; 7 ; л) -7 ; 8 ; м) -8 ; 7 .
1162. а) -9 ; 8 ; б) -8 ; 9 ; в) 1 ; 3 ; г) -5 ; -4 ; д) -80 ; 100 ; е) -5 ; 1 ; ж) 4 ; 5 ;
 з) -12 ; -9 ; и) -1 ; 5 ; к) -9 ; -1 ; л) 9 ; 12 ; м) -6 ; 2. **1163.** а) -50 ; -30 ; б) 30 ; 50 ;
 в) 20 ; 40 ; г) 5 ; 7 ; д) -35 ; 20 ; е) -10 ; -6 ; ж) 6 ; 10 ; з) -10 ; -9 ; и) -20 ; 35 ; к) 9 ;
 10 ; л) -24 ; 7 ; м) -70 ; 50 . **1164.** а) $-1,2$; 2 ; б) $-0,5$; $1,5$; в) $-1,5$; $2,5$; г) $-\frac{1}{3}$;
 $\frac{5}{3}$; д) $-\frac{2}{3}$; $\frac{10}{3}$; е) $0,8$; 1 ; ж) $-\frac{4}{3}$; 2 ; з) $-1,8$; и) $\frac{7}{6}$; к) $\frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{9}$;
 л) $\frac{-9 \pm \sqrt{46}}{7}$; м) $-\frac{5}{3}$; $\frac{7}{3}$. **1165.** а) -1 ; 4 ; б) 3 ; 11 ; в) 4 ; 6 ; г) -4 ; 5 ; д) $0,5$; $4,5$;
 е) $-3,5$; $-0,5$; ж) $\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{6}$; з) $-\frac{7}{3}$; $\frac{5}{3}$; и) -1 ; $\frac{14}{3}$; к) $-\frac{7}{4}$; 1 ; л) 4 ; 24 ; м) 4 ; 9 .
1166. а) 2 ; б) $1,25$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{5}{3}$. **1167.** а) $\frac{3}{8}$; б) $0,1$; в) 1 ; 3 ; г) 1 ; 5 .
1168. а) $-\frac{5}{6}$; $\frac{3}{2}$; б) $\frac{3}{2}$; 5 ; в) нет корней; г) 11 ; 12 ; д) 2 ; е) $\frac{25}{12}$; 5 ; ж) $15,8$;
 18 ; з) $-2,7$; 8 . **1169.** а) 1 ; б) $-0,5$; 1 ; в) -4 ; г) 0 ; 3 ; д) $-0,75$; $0,5$; е) 0 ; $\frac{20}{3}$;
 ж) 0 ; 5 ; з) $-\frac{1}{9}$; 1. **1170.** а) 27 ; 28 ; 29 ; б) 1 ; 2 ; 3 ; в) 2 ; 3 ; 4 или -4 ; -3 ; -2 ;
 г) -2 ; -1 ; 0 . **1173.** а) 4 ; б) 1 ; в) 2 ; г) 2 ; д) 2 ; е) 4 . **1174.** а) 4 ; б) 1 ; в) 2 ; г) 4 ;
 д) 2 ; е) 4 . **1175.** а) При $a = 9$; б) при $a = 3,5$; в) при $a < -0,8$; г) при $a < \frac{4}{3}$;
 д) при $a < -\frac{2}{3}$; е) при $a > 2$. **1176.** а) 5 ; -8 ; б) -3 ; -1 . **1177.** а) -1 ; -2 ; 2 ;
 б) $-0,6$; -1 ; 3 ; в) -2 ; 5 ; -10 . **1178.** 40 ; $\frac{8}{7}$. **1180.** а) $x^2 + 4x + 3 = 0$; б) $2x^2 - 9x +$
 $+ 4 = 0$; в) $3x^2 + 14x - 5 = 0$; г) $6x^2 - x - 1 = 0$. **1187.** а) $(3; 5)$; $(-2; 0)$; $(2; 6)$;
 $(\frac{1}{3}; 1)$; б) $[3; 8)$; $(-1; 4)$; $[2; 15)$; $(\frac{2}{3}; 5)$; в) $(3; 9)$; $[-1; 5)$; $(2; 18)$; $[\frac{2}{3}; 6)$.
1188. а) -6 ; в) 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10. **1189.** а) $(0; 3)$. **1190.** а) Нет, нет; в) 0 ; нет.
1191. -18 . **1192.** а) $[-\frac{6}{7}; +\infty)$; б) $(-\infty; 1]$; в) $[-2,6; +\infty)$; г) $(-\infty; -\frac{8}{19}]$.
1193. а) При $x < -\frac{1}{8}$; б) при $x > 0,2$; в) при $x > \frac{3}{7}$; г) при $x < -2$.
1194. а) $(-\infty; -1)$; б) $(-\infty; 0,25)$; в) $(-\infty; -4,75]$; г) $[-2; +\infty)$. **1195.** а) $(\frac{1}{3}; 3)$;
 б) $(2; 7)$; в) $(-1,2; +\infty)$; г) $(\frac{4}{3}; +\infty)$. **1196.** а) $(-\infty; -\frac{2}{8}) \cup (\frac{1}{5}; +\infty)$;
 б) $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$; в) $(-\infty; -\frac{3}{4}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$; г) $(-\frac{3}{2}; \frac{4}{5})$. **1197.** а) Нет решений;
 б) $(3,6; 4)$; в) $(-\infty; 1,5) \cup (3; +\infty)$; г) $(-\infty; \frac{1}{3}) \cup (\frac{7}{9}; +\infty)$. **1198.** а) $[-\frac{1}{6}; \frac{5}{6}]$;

- б) $\left[-\frac{17}{8}; -\frac{1}{8}\right)$; в) $[-0,4; 4,4)$; г) $(-2; 5,5]$. **1199.** а) $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$;
б) $\left[-\frac{1}{8}; 1\right]$; в) $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{7}{8}; +\infty\right)$; г) $[0; 1]$. **1200.** 7. **1201.** а) $-2; 1$; б) 3 ;
в) $\pm 0,5$; г) -2 ; 6; д) $-7; 9$; е) 3 ; ж) $-5; 4$; з) $-6; 2$; и) $[-4; 5]$. **1202.** а) $(-2; 1)$;
б) $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$; в) $(-\infty; 1)$; г) $(-\infty; 2) \cup (2; 2,5)$; д) $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; е) $(-\infty; 3)$; ж) $(-\infty; -2)$;
з) $(-6; 2)$; и) $(-6,5; 5,5)$; к) $\left[0; \frac{6}{7}\right]$. **1204.** а) 26 ; б) $4\sqrt{65}$; в) 52 ; г) 85 ; д) 40 ;
е) 145 . **1205.** а) $5; 17; \sqrt{146}; 6,5$; б) $10; 25; \sqrt{257}; 44$; в) $25; 41; 2\sqrt{65}; 32$;
г) $34; 37; \sqrt{809}; 460$; д) $\sqrt{10}; 41; \sqrt{1913}; 33,5$; е) $55; 61; 4\sqrt{137}; 1232$.
- 1228.** 9 см. **1229.** 12 см; 12 см; 8 см. **1230.** 6 см; 14 см; 8 см. **1231.** $\frac{m^2}{m-n}$;
 $\frac{mn}{m-n}$. **1232.** $27\frac{1}{12}$ см; $10\frac{5}{12}$ см; 25 см. **1233.** $\frac{mb}{b-m-n}$, $\frac{nb}{b-m-n}$.
1234. $\frac{a(m+n)}{m}$. **1235.** 52,5 см. **1236.** 30 см; 40 см. **1237.** 66 см. **1238.** 31,5 см,
 $\frac{21}{2}\sqrt{\frac{217}{13}}$ см. **1239.** а) 40 см, $34\frac{10}{119}$ см, $56\frac{24}{119}$ см. **1240.** $\frac{2p(b+c)}{|b-c|}$.
1241. 90 мм, 60 мм, 50 мм, 60 мм. **1242.** а) 330 см, 120 см, 210 см, 120 см;
б) 60 см. **1243.** $5:4$. **1244.** 27,2 см. **1245.** $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$. **1246.** 2 см, 8 см.
1247. $33\frac{3}{4}$ см. **1249.** 10 см. **1250.** 8 см, 18 см. **1251.** 5 см, 7,5 см. **1252.** 10 см.
1253. $6\sqrt{10}$ см. **1254.** 12 см, 15 см. **1255.** $\frac{b(b+c)}{m}$, $\frac{c(b+c)}{m}$, $b+c$. **1256.** 8 см,
24 см. **1257.** $\sqrt{n(m+n)}$, $a\sqrt{\frac{m+n}{n}}$. **1258.** $\frac{b(b+m)}{c}$, $\frac{a(b+m)}{c}$.
1259. $b\left(1 - \frac{b^2}{2a^2}\right)$. **1260.** 51 см, 30 см. **1261.** а) 19 см, 9 см; б) 9 см, 21 см;
в) 20 см, 12 см; г) 24 см, 32 см; д) 35 см, 28 см. **1262.** а) $20^\circ, 65^\circ, 95^\circ$; б) $40^\circ,$
 $85^\circ, 55^\circ$; в) $100^\circ, 55^\circ, 25^\circ$; г) $85^\circ, 65^\circ, 30^\circ$; д) $78^\circ, 54^\circ, 48^\circ$. **1263.** а) $10\frac{50}{61}$;
б) $18\frac{162}{181}$; в) $12\frac{72}{85}$; г) $32\frac{52}{85}$. **1265.** 4 см. **1266.** 3 см. **1267.** 864 см.
1268. 30 см, 20 см. **1269.** $21\frac{2}{3}$ мм. **1270.** 9 см. **1271.** 95° . **1272.** $20^\circ, 32^\circ$;
 128° . **1273.** $96^\circ, 48^\circ, 36^\circ$. **1274.** 5 см, 8 см, 8 см. **1275.** 15 см. **1276.** 40 см.
1279. $2:3$. **1280.** ab . **1282.** 4,5. **1283.** 40 см, 9 см. **1284.** 2 м и 8,5 м или 5 м
и 5,5 м. **1285.** 7 см^2 . **1286.** 4 см, 4,8 см, 4,8 см. **1287.** $130\frac{2}{3}\text{ см}^2$. **1288.** 80 см.
1289. 36 мм. **1290.** $32,5\text{ см}^2$. **1291.** $36(7 + 2\sqrt{3} + \sqrt{7})$ мм. **1292.** 360 см^2 .
1293. 972 см. **1294.** 112,5 см; $\frac{3375\sqrt{66}}{4}\text{ см}^2$. **1295.** 54 см. **1296.** 132 см^2 .
1297. 160 см. **1298.** 3072 см^2 . **1299.** 50 см, 32 см. **1300.** 80 см. **1301.** \sqrt{ab} .

1302. 63 см. **1303.** 12 см, 25 см. **1311.** 432 см³, 630 см³. **1312.** 384 см³, 378 см³. **1313.** 10,5 м/с², 1,35 м/с². **1314.** 252 см³, 240 см³. **1315.** 224 дм³, 630 дм³. **1316.** 0,8, 0,75. **1317.** 560 см³, 570 см³. **1318.** 910 см³, 720 см³. **1319.** 612 г, 864 г. **1320.** а) 756 г, 594 г; б) 0,63 г/см³, 0,45 г/см³. **1321.** а) 828 г, 792 г; б) 5 см × 3 см × 80 см; в) 4 см × 4 см × 100 см. **1322.** а) 284 г, 549 г; б) 2 см × 4 см × 50 см; в) 3 см × 4 см × 75 см. **1323.** $\frac{5}{6}$ м. **1324.** 0,39 м. **1325.** а) 861 г, 357 г; б) 5 см × 4 см × 82 см; в) 2 см × 4 см × 75 см. **1326.** а) 1404 г, 1104 г; б) 5 см × 6 см × 90 см; в) 5 см × 4 см × 80 см. **1327.** 2160 Дж, 2100 Дж. **1328.** 11 319 Дж, 17 836 Дж. **1329.** 245 000 Па, 184 240 Па. **1330.** 1050 кг/м³, 1350 кг/м³; 493 920 Па, 5 027 400 Па. **1331.** а) 13 750 Дж, 14 000 Дж; б) 550 м, 400 м. **1332.** 15 Н, 20 Н; 2250 Дж, 3600 Дж. **1333.** 0,054 м², 0,045 м². **1334.** 8400 Н/м², 12 600 Н/м². **1335.** 147 Вт, 196 Вт. **1336.** 147 Вт, 196 Вт. **1337.** 27,6 кН и 9,2 кН или 20 кН и 1,6 кН. **1338.** а) 600 Н, 3600 Н; б) 90 км/ч, 12 км/ч. **1339.** а) 9,8 м/с², 1,6 м/с²; б) 60 кг, 55 кг. **1340.** а) 3,7 м/с², 8,9 м/с²; б) 150 кг, 80 кг. **1341.** а) 50 кг и 78 кг; б) 9 и 5. **1342.** 100 кг, 130 кг; 8,9 м/с², 11 м/с². **1343.** 150 м, 100 м; 3,7 м/с², 25 м/с². **1344.** 462 дет., 231 дет., 392 дет. **1345.** 5 ч. **1346.** 20 ч. **1347.** 10 ч, 8 ч. **1348.** 4 ч. **1349.** Через 15 дней. **1350.** 20. **1351.** 750, 1500, 830. **1352.** 480 км. **1353.** 26 км/ч. **1354.** 20 км/ч. **1355.** 12 км/ч. **1356.** 4,5 км/ч. **1357.** 50 км/ч. **1358.** За 5 ч. **1359.** 4 км/ч. **1360.** 4 км/ч. **1361.** 55 мин, 1 ч 6 мин. **1362.** 5 дет./ч. **1363.** 5 км/ч. **1364.** 30 ч. **1365.** 120 км. **1366.** 18 ц/га, 15 ц/га. **1367.** 4,4 ч. **1368.** На 400 %. **1369.** 150. **1370.** 5 кг. **1371.** На 32 %. **1372.** На 21 %. **1373.** 125 %. **1374.** 14,4; 18; 15. **1375.** 10 кг. **1376.** 7,5 кг. **1377.** 1 кг и 2 кг. **1378.** 25 г и 75 г. **1379.** 300 г. **1380.** 40 г. **1381.** 4 кг, 6 кг. **1382.** 15 %, 55 %. **1383.** 960 г. **1384.** 75 г. **1385.** 5 %. **1386.** 4:3. **1387.** 6; 10. **1388.** 20 см, 6 см. **1389.** -9 или 10. **1390.** 12 см, 13 см, 5 см. **1391.** 40 км/ч, 30 км/ч. **1392.** 3 или -6. **1393.** 360 дм³ или 810 дм³. **1394.** 13 и 14 или -14 и -13. **1395.** За 6 дней. **1396.** 5 с. **1397.** 1 г 15 мин. **1398.** $\frac{2}{5}$. **1399.** $\frac{3}{8}$ или $\frac{25}{30}$. **1400.** 15 км/ч.

Предметный указатель

- Арифметический квадратный корень 104
- Геометрическая интерпретация числового неравенства 5, 6
- График квадратной функции 211—216
- Деление отрезка на равные части 233
- Котангенс угла 158, 283
- Коэффициент подобия 241, 256
- Квадратная функция 210
- Корень квадратный из числа 104
- степени n из числа 105
- Косинус угла 158, 273
- Многоугольник 65
- Неравенство двойное 7
- линейное 38
 - с переменной под знаком модуля 55—57
- Параллелограмм 66
- Площадь параллелограмма 150
- ромба 151
 - трапеции 150
 - треугольника 141, 143
- Подобные треугольники 241
- фигуры 256
- Признаки квадрата 87
- подобия треугольников 243—245
 - параллелограмма 69
 - прямоугольника 85
 - ромба 86
 - трапеции 67
- Разложение квадратного трехчлена на множители 199
- Решение прямоугольных треугольников 291
- Свойства арифметического квадратного корня 121—122
- квадрата 87
 - параллелограмма 68
 - прямоугольника 85
 - ромба 86
 - трапеции 67
 - числовых неравенств 12—15
- Связи между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного угла 289, 290
- Синус угла 158, 270
- Система линейных неравенств 46

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника 158
Сравнение действительных чисел 112
Средняя линия трапеции 76
— — треугольника 75
Сумма углов многоугольника 66
Тангенс угла 158, 281
Теорема Виета 196
— Пифагора 140
— Фалеса 230
Трапеция 66
Уравнение квадратное 171
Формулы корней квадратного уравнения 179
— приведения 290
Число действительное 112
— иррациональное 106
Числовые неравенства 5
— промежутки 27

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел I. Неравенства

1. Числовые неравенства и их свойства. Двойные неравенства	5
2. Действия над числовыми неравенствами	12
3. Числовые промежутки	27
4. Линейные неравенства с одной переменной	36
5. Системы линейных неравенств с одной переменной	45
6. Уравнения и неравенства с переменной под знаком модуля	55

Раздел II. Четырехугольники

7. Трапеция и параллелограмм	65
8. Средние линии треугольника и трапеции	75
9. Прямоугольник, ромб, квадрат	85

Раздел III. Квадратные корни

10. Рациональные числа	94
11. Иррациональные числа	103
12. Действительные числа	112
13. Свойства арифметического квадратного корня	121
14. Выражения с квадратными корнями	130

Раздел IV. Площадь фигур

15. Площадь треугольника. Теорема Пифагора	139
16. Площадь трапеции, параллелограмма, ромба	149
17. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла	158

Раздел V. Квадратные уравнения

18. Квадратное уравнение	170
19. Формулы корней квадратного уравнения	178
20. Уравнения, сводимые к квадратным	187
21. Квадратный трехчлен. Теорема Виета	196
22. Решение задач с помощью уравнений	205
23. Квадратная функция	210

Раздел VI. Подобные треугольники

24. Пропорциональные отрезки	228
25. Подобные треугольники	241
26. Подобные фигуры	252
27. Свойства прямоугольного треугольника	261
28. Синус и косинус углов от 0° до 180°	269
29. Тангенс и котангенс углов от 0° до 180°	281
30. Свойства и применения синуса, косинуса, тангенса и котан- генса	289

Материал для повторения

Числа и вычисления	302
Выражения и их преобразования	312
Уравнения и неравенства	326
Координаты и функции	338
Геометрические фигуры и их свойства	343
Геометрические величины	362
Геометрические построения линейкой и циркулем	371
Текстовые задачи	374
Таблица квадратов	386
Таблица значений тригонометрических функций	—
Ответы	388
Предметный указатель	404

(Название и номер учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка учащегося за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

Латотин Леонид Александрович
Чеботаревский Борис Дмитриевич

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие для 8 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

4-е издание, исправленное и дополненное

Зав. редакцией *В. Г. Бехтина*. Редакторы *Е. И. Чигринова*, *Е. М. Парашевич*. Технические рисунки *А. Л. Латотина*. Художественный редактор *Л. А. Дашкевич*. Техническое редактирование и компьютерная верстка *И. И. Дроздовой*, *И. И. Дубровской*. Корректоры *В. С. Бабеня*, *Е. П. Тхир*, *А. В. Алешко*.

Подписано в печать 23.01.2015. Формат 60 × 90¹/₁₆. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 25,5 + 0,25 форз. Уч.-изд. л. 18,39 + 0,21 форз. Тираж 3850 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие «Народная асвета»
Министерства информации Республики Беларусь.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/2 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск, Республика Беларусь.

ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/3 от 04.10.2013.

Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск, Республика Беларусь.

Правообладатель Народная асвета